Министерство образования Московской области

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Московской области «Электростальский колледж»

СОГЛАСОВАНО
ООО «РУСИНОКС»
Генеральный директор
_______/ Шкедин С.В.
(подпись/расшифровка)
«_12_»_____12_____202_2_г.

СОГЛАСОВАНО
ОАО «ЭЗТМ»
Директор по управлению персоналом и общим вопросам
_______/ Костромитин В.А.
(подпись/расшифровка)
«_12_»_____12_____202_2_г.

УТВЕРЖДАЮ
Директор ГБПОУ МО «Электростальский колледж»
_______ Мосейчук О. В.
«_12_»_____12_____202_2_г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Профессия

15.01.32 Оператор станков с программным управлением

Квалификация выпускника:

Оператор станков с программным управлением;
станочник широкого профиля

Форма обучения очная

Электросталь, 2022г.

Министерство образования Московской области
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Московской области «Электростальский колледж»

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий
методическим кабинетом
Черн.
Е.А.Чернецкая
«12» 12 2022г.

Комплект контрольно-оценочных средств

по дисциплине ПД.01 Математика

по профессии 15.01.32 Оператор станков с программным управлением

г. о. Электросталь, 2022 год

Содержание

1. Общие положения

Комплект оценочных средств (далее - КОС) предназначен для оценки результатов освоения дисциплины «ПД.01 Математика» общеобразовательного цикла в рамках основной профессиональной образовательной программы. КОС включают контрольные материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации в форме:

— *аттестация по текущим оценкам;*

— *практические работы;*

— *экзамена*

Контрольно-оценочные средства полностью соответствуют разработанной рабочей программе дисциплины. а также календарно-тематическому плану дисциплины, и входит в учебно - методический комплекс дисциплины.

2. План-график проведения текущего контроля и промежуточной аттестации:

Вид контроля	***Время проведения***
аттестация по текущим оценкам	*в процессе обучения*
Аттестация по текущим оценкам	В рамках текущего и комбинированного контроля
Практические работы, контрольная работа	В рамках промежуточного контроля в процессе изучения тем
Экзамен	После окончания курса обучения (итоговый контроль)

3. Организация контроля и оценки освоения программы учебной дисциплины

При изучении учебной дисциплины предусмотрены следующие виды **текущего контроля** знаний обучающихся:

устный опрос – контроль, проводимый после изучения материала в виде ответов на вопросы, позволяет не только проконтролировать знание темы урока, но и развивать навыки свободного общения, правильной устной речи;

письменный контроль – выполнение практических заданий по отдельным темам, разделам, позволяет выявить уровень усвоения теоретического материала и умение применять полученные знания на практике;

комбинированный опрос – контроль, предусматривающий одновременное использование устной и письменной форм оценки знаний, позволяющий опросить большое количество обучающихся;

Для проведения **промежуточного контроля** проводятся практические занятия по темам изучаемой дисциплины, с целью проверки усвоения изучаемого материала.

Итоговый контроль по дисциплине проводится в форме экзамена.

2. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке

4.1. В результате аттестации по учебной дисциплине осуществляется комплексная проверка следующих умений и знаний, а также динамика формирования общих и профессиональных компетенций, предусмотренных ФГОС:

Код	Наименование общих компетенций
ОК 1.	Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам
ОК 2.	Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности
ОК 3.	Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях
ОК 4.	Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде
ОК 5.	Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста
ОК 6.	Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения
ОК 7.	Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях
ОК 8.	Использовать средства физической культуры для сохранения и укрепления здоровья в процессе профессиональной деятельности и поддержания необходимого уровня физической подготовленности
ОК 9.	Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.

Контрольная работа
1 семестр

Краткое описание данной формы (за какой период, кол-во тем, вопросов, вариантов и т.п.)

Промежуточная аттестация по математике проводится в форме контрольной работы за период изучения дисциплины (1 семестр).

3.Эталоны ответов

Объекты контроля	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
1. Действия над действительными числами	58пач	80 пач	58 пач	999
2.Нахождения процентов от числа	15225 руб.	8700 руб	12615 руб	10005
3. Преобразование выражений содержащих корень, степень	47	33	142	3
4. Основное тригонометрическое тождество, значение функций по четвертям	$\frac{\sqrt{15}}{4}$	0.8	0,8	0,8
5. Показательное уравнение	-1	-1	-1	7/3
6.Преобразование выражений содержащих логарифм	-3	9	4	4
7. Логарифмическое уравнение	-4	17	17	5
8. Тригонометрическое уравнение	-π/2+2πn,	-π/2+2πn,	π/2+2πn,	-π/2+2πn,
9.Тригонометрическое уравнение	π+2πn	-π/2+πn,	±2π/3+2πn	2πn; ±2π/3+2πn
10.Область определения логарифмической функции	x<-4;x>0	(0;4)	x<-5;x>0	x<0; x>7

I вариант

Критерии оценки выполнения работы

Оценка	**Число баллов, необходимое для получения оценки**
«3» (удовлетворительно)	4-7
«4» (хорошо)	8-10 (не менее одного задания из дополнительной части)
«5» (отлично)	11-14 (не менее двух заданий из дополнительной части)

Обязательная часть

При выполнении заданий запишите ход решения и полученный ответ.

1. (1 балл) В летнем лагере на каждого участника полагается 50 г сахара в день. В лагере 163 человека. Сколько килограммовых пачек сахара понадобится на весь лагерь на 7 дней?

2. (1 балл) Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 17500 рублей. Сколько рублей он получит после вычета налога на доходы?

3. (1 балл) Вычислите значение выражения $16^{\frac{3}{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + \sqrt{49}$.

4. (1 балл) Найдите значение $\cos\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = \frac{1}{4}$ и $\alpha \in I$ четверти.

5. (1 балл) Решите уравнение $6^{5x+1} = 36^{2x}$.

6. (1 балл) Вычислите значение выражения $\log_3 27 - \log_4 64 - \lg 1000 + \ln 1$.

7. (1 балл) Решите уравнение $\log_{\frac{1}{3}}(2x+17) = -2$.

8. (1 балл) Решите уравнение $\sin^2 x + \sin x = -\cos^2 x$.

Дополнительная часть

9. (3 балла) Найдите решение уравнения: $2\sin^2 x - 5\cos x - 5 = 0$.

10.(3 балла) Найдите область определения функции $y = \lg\left(x^2 + 4x\right)$.

2 вариант

Критерии оценки выполнения работы

Оценка	**Число баллов, необходимое для получения оценки**
«3» (удовлетворительно)	4-7
«4» (хорошо)	8-10 (не менее одного задания из дополнительной части)
«5» (отлично)	11-14 (не менее двух заданий из дополнительной части)

Обязательная часть

При выполнении заданий запишите ход решения и полученный ответ.

1. (1 балл) В летнем лагере на каждого участника полагается 70 г сахара в день. В лагере 163 человека. Сколько килограммовых пачек сахара понадобится на весь лагерь на 7 дней?
2. (1 балл) Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 10000 рублей. Сколько рублей он получит после вычета налога на доходы.
3. (1 балл) Вычислите значение выражения $\sqrt{9}+81^{\frac{3}{4}}+27^{\frac{1}{3}}$.
4. (1 балл) Найдите значение $\sin\alpha$, если известно, что $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ и $\alpha \in I$ четверти.
5. (1 балл) Решите уравнение $7^{5x+1}=49^{2x}$.
6. (1 балл) Вычислите значение выражения $\log_7 49+\lg 1000-\ln 1+\log_2 16$.
7. (1 балл) Решите уравнение $\log_3(5x-4)=4$.
8. (1 балл) Решите уравнение $\cos^2 x+\sin x=-\sin^2 x$.

Дополнительная часть

9. (3 балла) Найдите решение уравнения: $\cos^2 x+6\sin x-6=0$.
10. (3балла) Найдите область определения функции $y=\ln\left(4x-x^2\right)$.

3 вариант

Критерии оценки выполнения работы

Оценка	Число баллов, необходимое для получения оценки
«3» (удовлетворительно)	4-7
«4» (хорошо)	8-10 (не менее одного задания из дополнительной части)
«5» (отлично)	11-14 (не менее двух заданий из дополнительной части)

Обязательная часть

При выполнении заданий запишите ход решения и полученный ответ.

1. (1 балл) В летнем лагере на каждого участника полагается 40 г сахара в день. В лагере 161 человек. Сколько килограммовых пачек сахара понадобится на весь лагерь на 9 дней?
2. (1 балл) Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 14500 рублей. Сколько рублей он получит после вычета налога на доходы?
3. (1 балл) Вычислите значение выражения $125^{\frac{2}{3}} + 25^{\frac{3}{2}} - \sqrt{64}$.
4. (1 балл) Найдите значение $\cos\alpha$, если известно, что $\sin\alpha = 0{,}6$ и $\alpha \in I$ четверти.
5. (1 балл) Решите уравнение $27^{3x+1} = 3^{4x-2}$.
6. (1 балл) Вычислите значение выражения $\log_2 64 - \log_5 25 + \lg 10 + \log_3 1$.
7. (1 балл) Решите уравнение $\log_4(2x-18) = 2$
8. (1 балл) Решите уравнение $\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x$.

Дополнительная часть

9. (3 балла) Найдите решение уравнения: $2\sin^2 x + 7\cos x + 2 = 0$.
10. (3 балла) Найдите область определения функции $y = \log_2\left(x^2 + 5x\right)$.

4 вариант

Критерии оценки выполнения работы

Оценка	Число баллов, необходимое для получения оценки
«3» (удовлетворительно)	4-7
«4» (хорошо)	8-10 (не менее одного задания из дополнительной части)
«5» (отлично)	11-14 (не менее двух заданий из дополнительной части)

Обязательная часть

При выполнении заданий запишите ход решения и полученный ответ.

1. (1 балл) В санатории на каждого отдыхающего положено 200 грамм кефира в день. Какое наименьшее количество полулитровых пакетов кефира необходимо заготовить на 3 дня из расчета на 831 человек? Открытых пакетов не должно оставаться на следующий день.
2. (1 балл) Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. Заработная плата Ивана Кузьмича равна 11500 рублей. Сколько рублей он получит после вычета налога на доходы?
3. (1 балл) Вычислите значение выражения $32^{\frac{2}{5}} + \sqrt{49} - 16^{\frac{3}{4}}$.
4. (1 балл) Найдите значение $\sin\alpha$, если известно, что $\cos\alpha = 0,6$ и $\alpha \in I$ четверти.
5. (1 балл) Решите уравнение $27^{1-x} = \frac{1}{81}$.
6. (1 балл) Вычислите значение выражения $\log_2 16 + \log_{18} 1 - \lg 10000 + \log_3 81$.
7. (1 балл) Решите уравнение $\log_3(2x-1) = 2$.
8. (1 балл) Решите уравнение $-\cos^2 x = \sin^2 x + \sin x$.

Дополнительная часть

9. (3 балла) Найдите решение уравнения: $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.
10. (1 балла) Найдите область определения функции $y = \lg\left(x^2 - 7x\right)$.

ЭКЗАМЕН

ПАКЕТ ЭКЗАМЕНАТОРА

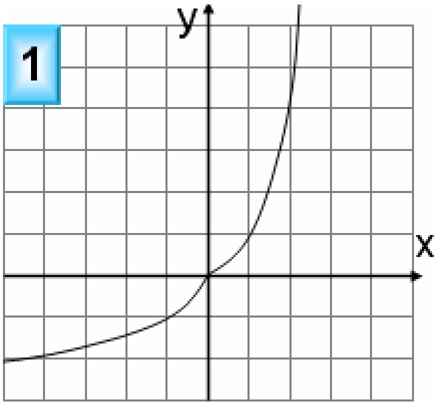
Критерии оценки выполнения работы

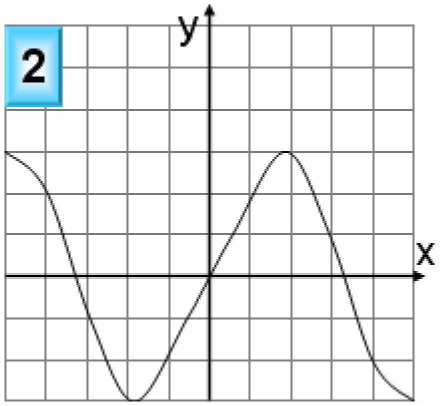
Оценка	Количество баллов
«3» (удовлетворительно)	9–14
«4» (хорошо)	15–20, при наличии не менее одного задания из дополнительной части
«5» (отлично)	21–30, при наличии не менее двух заданий из дополнительной части

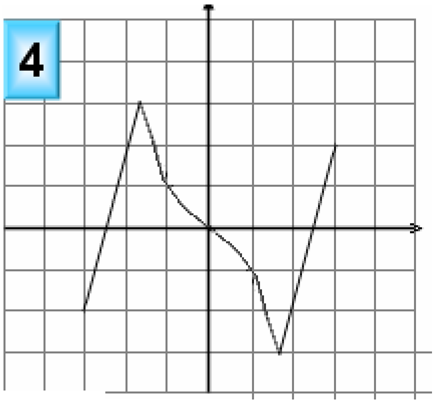
1 вариант

Обязательная часть

1.(1 балл) Учебник стоит 60 рублей. Определите, сколько таких учебников можно купить за 200 рублей, если его цена снизилась на 10 %.
2.(1 балл) Определите, сколько банок краски по 3 кг необходимо купить для покраски пола в кабинете математики площадью 5×7 $м^2$, если на $1м^2$ расходуется 300 грамм краски.
3.(1 балл) Определите, какие из перечисленных точек принадлежат графику функции у (х)=5х-2
А(2;8); В(0;1); С(3;7), Д(0;-2).
4.(1 балл) Вычислите значение выражения $4^{\frac{1}{2}}+8^{\frac{2}{3}}+\sqrt[4]{81\cdot 625}$
5. (1 балл) Найдите значение cos α , если известно, что sin $\alpha = \frac{1}{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
6.(1 балл) Решите уравнение $2^{4x+1}=16^{2x}$.
7 .(1 балл) Вычислите значение выражения $\log_3 27-\log_3 \frac{1}{27}+¿\log_{32}\sqrt{32}+lg\,1.¿$
8. (1 балл) Решите уравнение $\log_2(3-x)=0$.
9.(1 балл) Определите, какой из ниже приведенных графиков (Рис.1) соответствует четной функции. Запишите его номер и кратко поясните, почему.







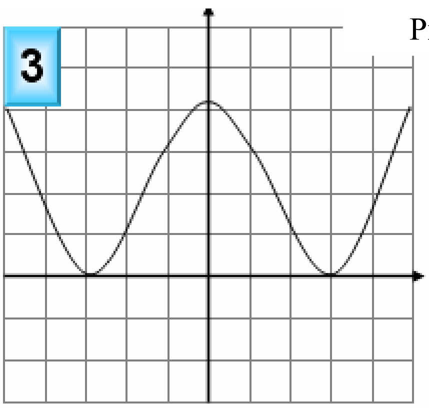


Рис 1.

Используя график функции y = f(x) (Рис. 2), определите и запишите ответ:

10. (1 балл) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке [-3;4];

11. (1 балл) промежутки возрастания и убывания функций;

12. (1 балл) при каких значениях x, на отрезке $[-3;2]$ f(x) ≥0 ?

13. (1 балл) От электрического столба высотой 8 метров к зданию, высота которого 4 метра натянут кабель. Определите длину кабеля, если расстояние между зданием и столбом 3 метра.

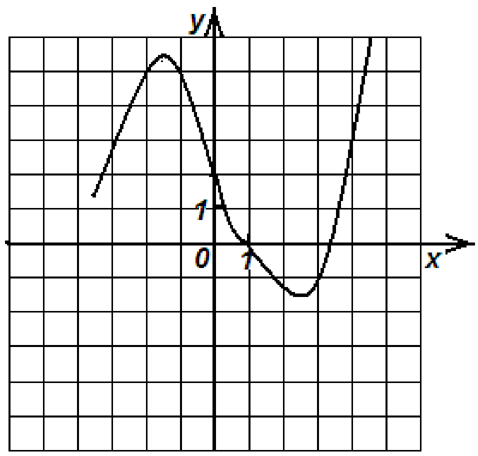


Рис 2.

14. (1 балл) Тело движется по закону S(t)= 2x^2-7x+3. Определите, в какой момент времени скорость будет равна 21.

15. (1 балл) Найдите область определения функции y = lg (x^2-2x).

16. (1 балл) Решите уравнение $\frac{1}{3}\sqrt{x-5}=4$

17. (1 балл) Решите уравнение $cos^2 x+\sin x=-\sin^2 x$

18. (1 балл) Прямоугольный треугольник с катетами 2 см и 4 см в первый раз вращается вокруг большого катета, а во второй – вокруг меньшего. Определите полученные геометрические тела и сравните площади их боковых поверхностей.

Дополнительная часть

19. (3 балла) Найдите промежутки убывания функции у $=x^3-3x^2-45x+225$.

20. (3 балла) Основанием прямой призмы является ромб со стороной 14 см и углом 60 °. Меньшее из диагональных сечений призмы является квадратом. Найдите объем призмы.

21.(3 балла) Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_5 x-\log_5 y=\log_5(y+3) \\ x-3y=4 \end{cases}$

22. (3 балла) Найдите решение уравнения: 1+ cosx + cos2x=0

Вариант 2

Обязательная часть

1.(1балл) Блокнот стоит 40 рублей. Какое наибольшее количество таких блокнотов можно будет купить на 500 рублей после повышения цены на 15%?

2.(1 балл) Определите, сколько банок краски по 3 кг необходимо купить для покраски пола в актовом зале площадью 10×7 $м^2$, если на 1$м^2$ расходуется 300 грамм краски.

3.(1 балл) Определите, какие из перечисленных точек принадлежат графику функции у (х)=4х-2.

А(10;2); В(2;6); С(3;4), Д(0;-2).

4.(1 балл) Вычислите значение выражения $25^{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{27\cdot 8}+125^{\frac{2}{3}}$

5. (1 балл) Найдите значение cos α , если известно, что sin $\alpha=\frac{3}{5}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

6.(1 балл) Решите уравнение $3^{5x+1}=9^{2x}$.

7 .(1 балл) Вычислите значение выражение $\log_2 32+lg1+\log_2\frac{1}{2}-\log_{15}\sqrt{15}$.

8. (1 балл) Решите уравнение$\log_3(5+2x)=1$.

9.(1 балл) Определите, какой из ниже приведенных графиков (Рис.1) соответствует четной функции. Укажите его номер и кратко поясните, почему.

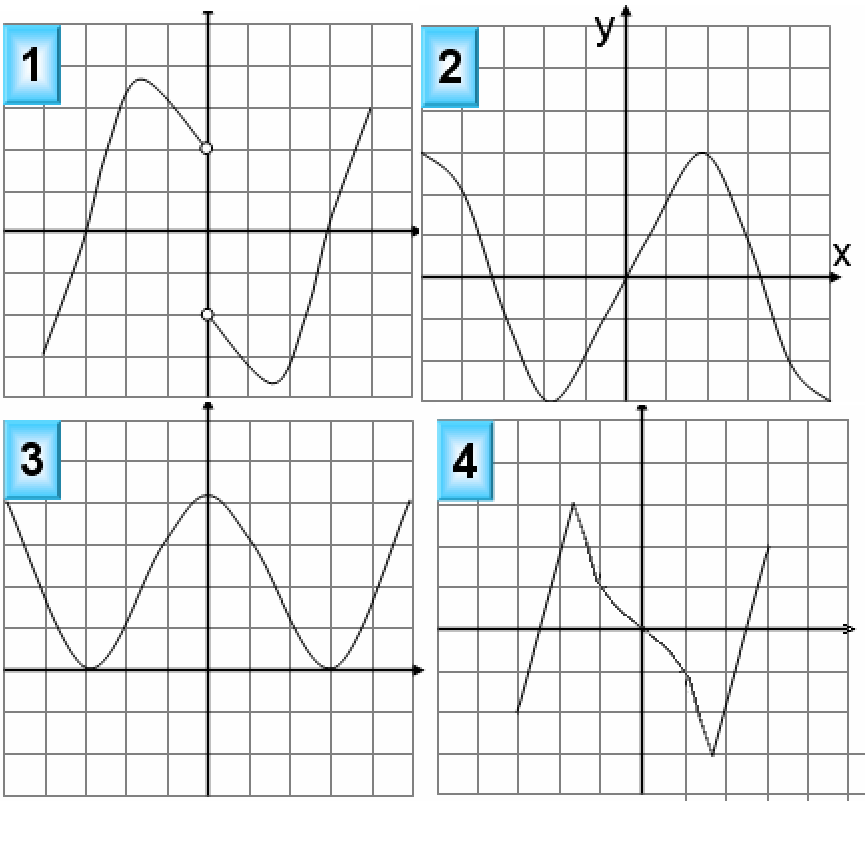


Рис. 1.

Используя график функции y = f(x) (Рис.2), определите и запишите ответ:

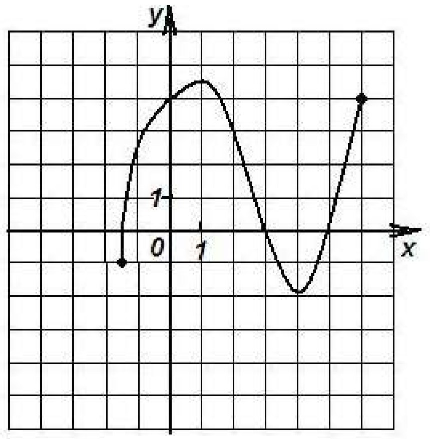


Рис 2.

10.(1 балл) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке [-1;6];
11.(1 балл) промежутки возрастания и убывания функций;
12.(1 балл) при каких значениях x f(x) ≥0.
13. (1 балл) От электрического столба высотой 8 метров к зданию, высота которого 2 метра натянут кабель. Определите длину кабеля, если расстояние между зданием и столбом 8 метров.
14.(1 балл) Тело движется по закону S(t)= $2x^2$+x+4. Определите, в какой момент времени скорость будет равна 59.
15.(1 балл) Найдите область определения функции y = lg ($6x^2$-2x).
16. (1 балл) Решите уравнение $\frac{1}{3}\sqrt{x+4}=9$
17.(1 балл) Решите уравнение $\cos^2 x=-\sin^2 x-\sin x$.
18.(1 балл) Прямоугольный треугольник с катетами 3 см и 5 см в первый раз вращается вокруг большого катета, а во второй – вокруг меньшего. Определите полученные геометрические тела и сравните площади их боковых поверхностей

Дополнительная часть

19. (3 балла). Найдите промежутки убывания функции y =$2x^3-15x^2+36x+1$.
20. (3 балла). Основанием прямой призмы является ромб со стороной 16 см и углом 60 °. Меньшее из диагональных сечений призмы является квадратом. Найдите объем призмы.
21. (3 балла). Решите систему уравнений $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2. \end{cases}$
22. (3 балла). Найдите решение уравнения: 1- cos2x = 2sinx.

Вариант 3

Обязательная часть

1. (1 балл). Пачка сливочного масла стоит 25 рублей. Пенсионерам магазин делает скидку 5%.Сколько пачек масла сможет купить пенсионер за 100 рублей?
2. (1 балл) Определите, сколько банок краски по 2 кг необходимо купить для покраски пола в спортивном зале площадью 20$м^2$, если на 1$м^2$ расходуется 300 грамм краски.
3. (1 балл) Определите, какие из перечисленных точек принадлежат графику функции y (x)=2x+2.
A(0;2); B(0;1); C(-2;-2), Д(1;2)
4. (1 балл). Вычислите значение выражения $3^2+\sqrt[3]{81\cdot 125}+27^{\frac{1}{3}}$.
5. (1 балл). Найдите значение sin α , если известно, что cos α= 0,6 и 0 < α <$\frac{\pi}{2}$
6. (1 балл). Решите уравнение $2^{2x-1}=4^{3x}$.
7. (1 балл). Вычислите значение выражения$\log_2 8+lg\,1-\log_2\frac{1}{2}+\log_{15}\sqrt{15}$
8. (1 балл). Решите уравнение $\log_4(x+3)=2$.
9. (1 балл). Определите, какой из приведенных графиков (Рис.1) соответствует нечетной функции. Укажите его номер и кратко поясните, почему.

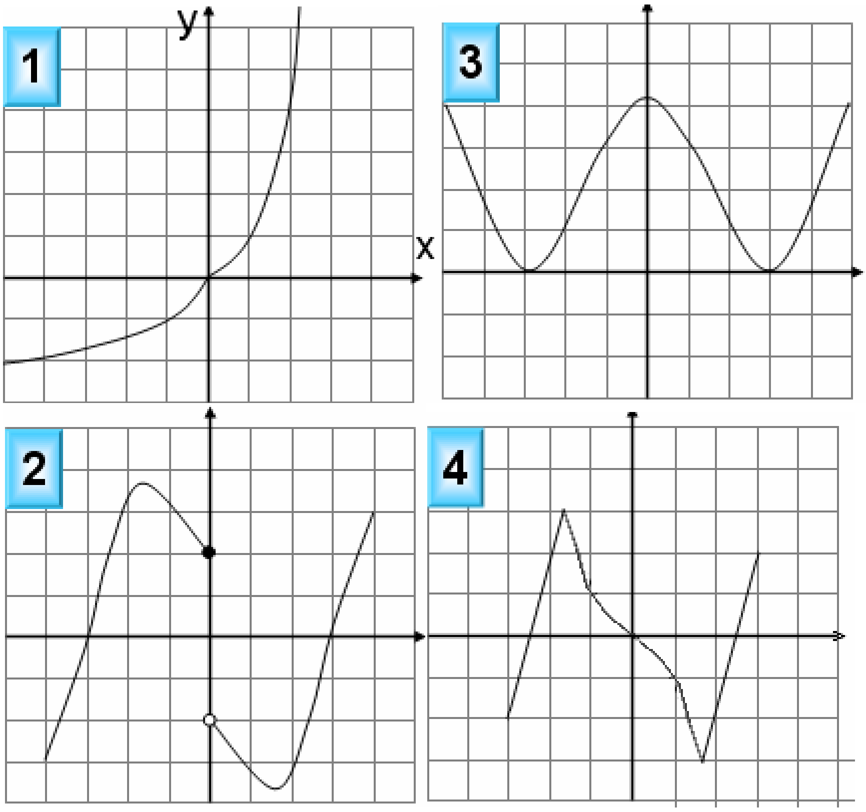


Рис.1.

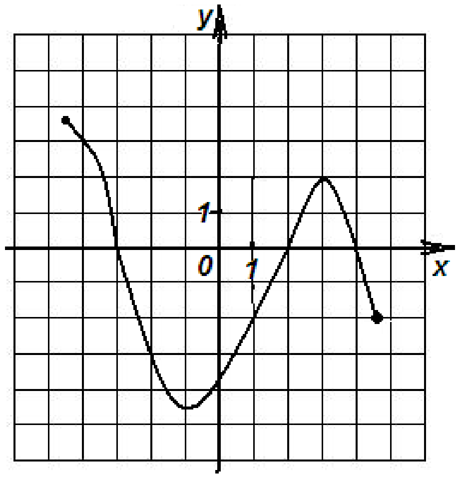


Рис 2.

Используя график функции y = f(x) (Рис.2.), определите и запишите ответ:

10. (1 балл) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке [-2;4];
11. (1 балл) промежутки возрастания и убывания функций;
12. (1 балл) при каких значениях x $f(x) \geq 0$.
13. (1 балл). От электрического столба высотой 10 метров к зданию, высота которого 6 метров натянут кабель. Определите длину кабеля, если расстояние между зданием и столбом 3 метра.
14. (1 балл). Тело движется по закону S(t)= $5x^2-3x+3$. Определите, в какой момент времени скорость будет равна 17.
15. (1 балл). Найдите область определения функции y = lg ($3x^2-6$¿.
16. (1 балл). Решите уравнение $\frac{1}{2}\sqrt{x-8}=3$.
17. (1 балл). Решите уравнение $-\sin^2 x+\sin x=\cos^2 x$
18. (1 балл). Прямоугольный треугольник с катетами 4 см и 5 см в первый раз вращается вокруг большого катета, а во второй – вокруг меньшего. Определите полученные геометрические тела и сравните площади их боковых поверхностей.

Дополнительная часть

19. (3 балла). Найдите промежутки убывания функции y =$3x^5-5x^3$.
20. (3 балла). Основанием прямой призмы является ромб со стороной 11 см и углом 60 °. Меньшее из диагональных сечений призмы является квадратом. Найдите объем призмы.
21. (3 балла). Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_3(x-y)=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$
22. (3 балла). Найдите решение уравнения: $\sin^2 x-3\sin x\cos x+2\cos^2 x=0$.

Вариант 4.

Обязательная часть

1. Тетрадь стоит 20 рублей. Какое наибольшее число таких тетрадей можно будет купить на 650 рублей после понижения цены на 20%?

2.Определите, сколько банок краски по 3 кг необходимо купить для покраски пола в кабинете математики площадью $5\times7\text{м}^2$, если на 1м^2 расходуется 300 грамм краски.

3.(1 балл) Определите, какие из перечисленных точек: А(0;-2); В(0;1); С(3;4), Д(1;1), принадлежат графику функции у (х)=3х-2.

4.(1 балл) Вычислите значение выражения $2^5+\sqrt[3]{27\cdot125}+4^{\frac{3}{2}}$.

5. (1 балл) Найдите значение $\cos\alpha$, если известно, что $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{\pi}{2}$

6.(1 балл) Решите уравнение $5^{4x+1}=25^x$.

7 .(1 балл) Вычислите значение выражения $lg1+\log_3 27-\log_5\frac{1}{5}+\log_{13}\sqrt{13}$

8. (1 балл) Решите уравнение $\log_4(3-x)=2$

9.(1 балл) Определите, какой из графиков (Рис.1.) соответствует нечетной функции. Укажите его номер и кратко поясните, почему.

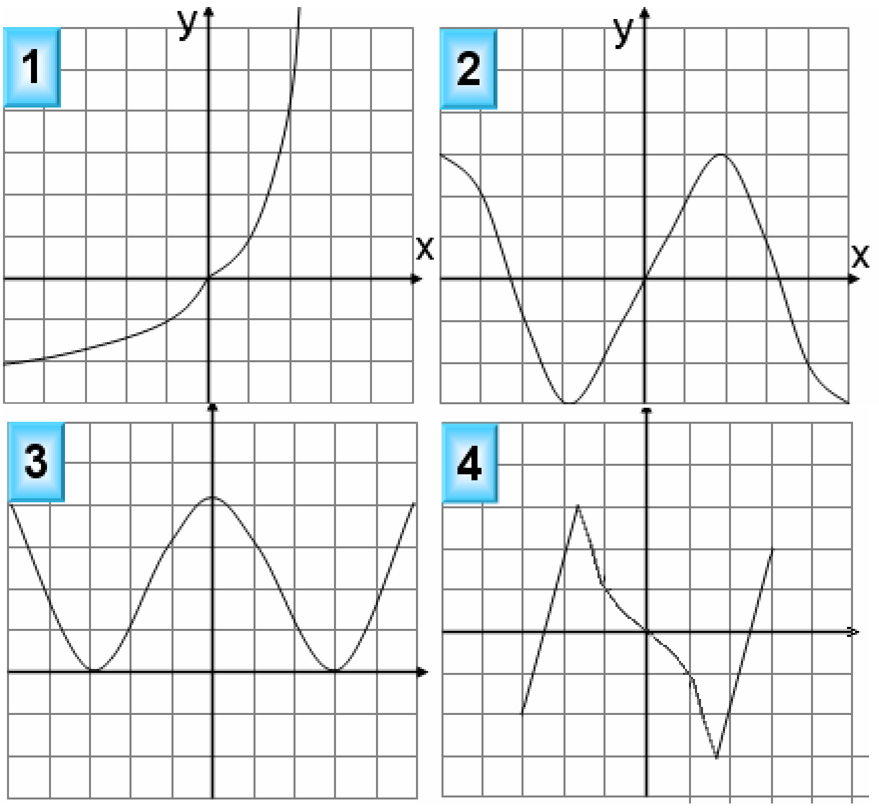
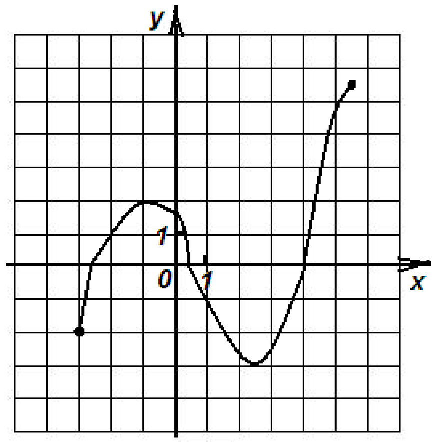


Рис.1.



Используя график функции у = f(x) (Рис.2)), определите и запишите ответ:

10.(1 балл) наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке [-3;3];

11. (1 балл) промежутки возрастания и убывания функций;

12. (1 балл) при каких значениях х $f(x)\geq0$.

13. (1 балл) От электрического столба высотой 11 метров к зданию, высота которого 7 метров натянут кабель. Определите длину кабеля, если расстояние между зданием и столбом 3 метра.

14. (1 балл) Тело движется по закону S(t)= $4x^2 - x + 5$. Определите, в какой момент времени скорость будет равна 19. Рис 2.

15. (1 балл) Найдите область определения функции у = lg ($5x^2 - 10$¿.

16. (1 балл) Решите уравнение $\frac{1}{4}\sqrt{x-2} = 2$.

17. (1 балл) Решите уравнение $\cos^2 x + \sin x = -\sin^2 x$.

18. (1 балл) Прямоугольный треугольник с катетами 1 см и 5 см в первый раз вращается вокруг большого катета, а во второй – вокруг меньшего. Определите полученные геометрические тела и сравните площади их боковых поверхностей.

Дополнительная часть

19. (3 балла) Найдите промежутки убывания функции у =$x^3 - 3x^2 - 9$.

20. (3 балла) Основанием прямой призмы является ромб со стороной 15 см и углом 60 °. Меньшее из диагональных сечений призмы является квадратом. Найдите объем призмы.

21. (3 балла) Решите систему уравнений $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ lg\, x - lg\, y = 2. \end{cases}$

22.(3 балла) Найдите решение уравнения: $\cos^2 x = cosx + 2$.

Эталоны ответов

1 вариант

Обязательная часть

1.1) 100%-10%=90%

2) 90%=0,9
3) 60·0,9==54(р) - стоимость учебника после снижения цены
4) 200:54≈3,7.
Ответ: 3 учебника.

2. 1) S=5·7=35 ($м^2$¿

2)$35 \cdot 300 = 10500\,(гр)$- краски всего
3)10500:3000=3,5.
Ответ: 4 банки.

3.A(2;5); D(0; 2).

4.$2^{2\cdot\frac{1}{2}} + 2^{3\cdot\frac{2}{3}} + 3\cdot 5 = 33$.

5.cos$\alpha = \pm\sqrt{1 - sin\alpha} = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.к угол α находится в первой четверти, то cos α¿0.

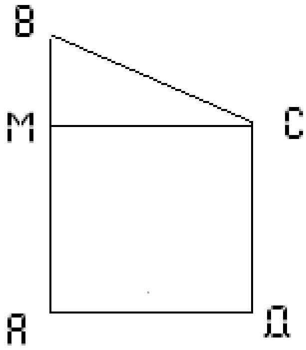
Ответ $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6.$2^{4x+1} = 16^{2x}$
$2^{4x+1} = 2^{8x}$
4x+1=8x
4x=1
X=$\frac{1}{4.}$
Ответ: $\frac{1}{4}$.

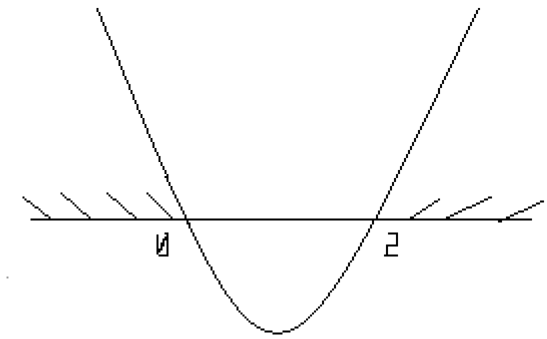
7) 3-(-3)+$\frac{1}{2} + 0 = 6{,}5$

8) $\log_2(3 - x) = 0$ D($\log_2 t$)-положительные действительные числа, то 3-x>0,
X<3
$2^0 =$ ¿3-x
x=2.

Ответ: 2.
9) Ответ:3. График симметричен относительно оси ординат.
10) 5,5- наибольшее значение функции, -1,5 -наименьшее значение функции.
11)Функция возрастает $[-\infty;-1,5]\cup[2,5;+\infty]$; убывает $[-1,5;2,5]$
12)$[-3;1]$
13)ΔMBC- прямоугольный. MB=AB-AM=8-4=4(м). По теореме Пифагора
BC=$\sqrt{MC^2+MB^2}$=$\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5\,(м)$



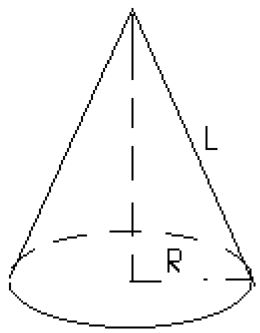
Ответ:5 метров.
14) S(t)= $2x^2$-7x+3
S'(t)=ϑ(t)
ϑ(t)=4x-7
4x-7=21
X=7
Ответ: 7.
15) y = Lg (x^2-2x).
x^2-2x¿0
Пусть $x^2-x=0$
x(x- 2)=0
x=0 и x=2. Так как a=1¿0, то ветви параболы смотрят вверх.



Ответ: (-∞;0) ∪ (2;+∞).
16) $\frac{1}{3}\sqrt{x-5}=4$
$\sqrt{x-5}$=4:$\frac{1}{3}$
$\sqrt{x-5}$=12
x-5=144
x=149.
Ответ: x=149
17)$\cos^2 x+\sin x$=-$\sin^2 x$
$\cos^2 x+\sin^2 x+\sin x=0$
1+sinx=0
Sinx=-1

Ответ:x=$\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

18)Конус.



$S_1 = \frac{1}{2}\pi R_1 L_1$

$S_2 = \frac{1}{2}\pi R_2 L_2$; $L_1 = L_2 = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20}$

$\frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1}$

Ответ:2:1

Дополнительная часть

19) y $= x^3 - 3x^2 - 45x + 225$.

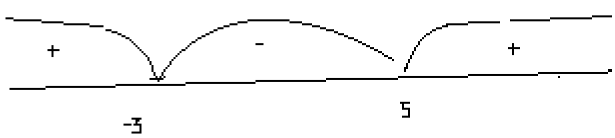
y'=$3x^2 - 6x - 45$

y′=0

$3x^2 - 6x - 45 = 0$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

D=$b^2 - 4ac = 64 > 0 \rightarrow$ *уравнение имеет* 2 *корня*



Ответ: (-3; 5)

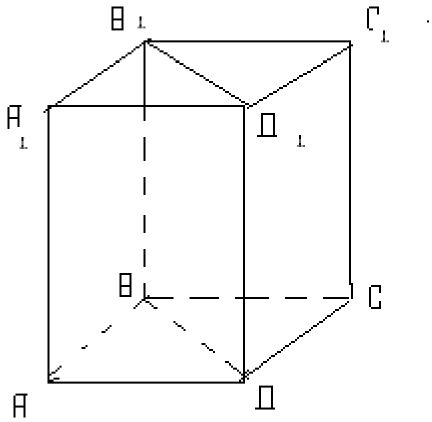
20)Дано: АВСД*АВСД*-прямая призма.

АВСД-ромб, $\propto = 60°$,АВ=14.

Найти:V

Решение:V=SH

S=$AB^2 \sin \propto = 14^2 \sin 30° = 196 \cdot \frac{1}{2} = 98$



$\Delta\, АВД - равносторонний$

H=12,т.к

V=98.12=1176($м^3$¿

Ответ: 1176 ($м^{3¿}$¿.

21) $\begin{cases} \log_5 x - \log_5 y = \log_5(y+3) \\ x - 3y = 4 \end{cases}$

Решение:

1) ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ y+3>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$,

2) $\begin{cases} \log_5 x - \log_5 y = \log_5(y+3) \\ x - 3y = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} \log_5 x - \log_5 y = \log_5(y+3) \\ x = 4+3y \end{cases}$,

$\begin{cases} x = y(y=3) \\ x = 4+3y \end{cases}$,

4+3y=y (y+3)

$y^2=4$,

У=2 и у=-2- посторонний корень.

При у=2, х=10

Ответ : х=10, у=2.

22) 1+cosx +cos2x=0

cos2x =$\cos^2 x - \sin^2 x$

1+ cosx+ $\cos^2 x - \sin^2 x = 0$

(1-$\sin^2 x$¿+$\cos^2 x$+cosx=0

$\cos^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$,

$2\cos^2 x + cosx = 0$,

cosx(2cosx+1)=0

cosx=0 и 2cosx=-1

$$x = \pm \arccos\left(\frac{-1}{2}\right) + 2\pi k, k \in Z$$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$ $\qquad$ $x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, k \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$; $\qquad$ $x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, k \in Z$.

Входный контроль

Вариант 1

1. Решить уравнение: $2x^2 + 3x - 5 = 0$.
2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3x - y = 3, \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$
3. Решить неравенство: *6x – 5(2x + 8)¿14 + 2x.*
4. Найти 15% от числа 80.
5. Выполните действие, и результат запишите в виде десятичной дроби: $(1{,}2 \cdot 10^{-3}) \cdot (3 \cdot 10^{-1})$.

Входный контроль

Вариант 2

1. Решить уравнение: $5x^2 - 7x + 2 = 0$.
2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 5x + 2y = 0. \end{cases}$
3. Решить неравенство: *5 + x ¿ 3x - 3(4x + 5).*
4. Найти 45% от числа 90.
5. Выполните действие, и результат запишите в виде десятичной дроби: $(1{,}6 \cdot 10^{-5}) \cdot (4 \cdot 10^{2})$.

Входный контроль

Вариант 3

1. Решить уравнение: $3x^2 - 5x - 2 = 0$.
2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x + 5y = 7, \\ 3x + 2y = -5. \end{cases}$
3. Решить неравенство: *3(3x - 1)¿2(5x - 7).*
4. Найти 40% от числа 120.
5. Выполните действие, и результат запишите в виде десятичной дроби:

$$\frac{7{,}2 \cdot 10^{-1}}{1{,}2 \cdot 10^{10}}..$$

Входный контроль

Вариант 4

1. Решить уравнение: $2x^2 - 7x + 3 = 0$.
2. Решить систему уравнений: $\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 3x + y = 7. \end{cases}$
3. Решить неравенство: *5(x + 4)¿2(4x - 5).*
4. Найти 30% от числа 240.
5. Выполните действие, и результат запишите в виде десятичной дроби:

$$\frac{6{,}4 \cdot 10^{12}}{8 \cdot 10^{14}}.$$

ОТВЕТЫ к проверочной работе **ВХОДНЫЙ КОНТРОЛЬ**

№ варианта	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5
1	-2,5; 1	(2;3)	$x<-9$	12	$3{,}6 \cdot 10^{-4}=$ 0,00036
2	0,4; 1	(-2;5)	$x>-2$	40,5	$6{,}4 \cdot 10^{-3}=$ 0,0064
3	$-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$; 2	(-3;2)	$x<11$	48	$6 \cdot 10^{-11}=$ 0,00000000006
4	0,5; 3	(2;1)	$x<10$	72	$0{,}8 \cdot 10^{-2}=$

					0,008

Практическое занятие

Повторение школьной алгебры: «Преобразование выражений»

Правила действий над обыкновенными дробями:

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm bc}{bd};\quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\quad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Формулы сокращенного умножения:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2;\quad a^2-b^2=(a+b)(a-b);$$

$$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2);\quad (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$$

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

1. Вычислите значение выражения: $\left(\left(2{,}15-1\frac{5}{16}\right):33{,}5+5\frac{1}{7}\cdot 3{,}85-15{,}7\right)\cdot\frac{8}{11}+2{,}25$.

2. Упростите выражение: $\left(\frac{x+10}{5x+25}-\frac{1}{x+5}\right)\frac{5}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}$.

Вариант 2.

1. Вычислите значение выражения: $\left(75:4\frac{1}{6}-3\frac{9}{23}\cdot 3\right)\left(1\frac{5}{18}+0{,}35-\frac{11}{15}\right):1{,}4$.

2. Упростите выражение: $\frac{y^2}{y^2-1}+\frac{1}{y^2-1}:\left(\frac{2}{2y-y^2}-\frac{1}{2-y}\right)$.

Вариант 3.

1. Вычислите значение выражения: $45{,}09:1{,}5-\left(2\frac{1}{3}\cdot 4\frac{1}{2}-2{,}5\cdot 2\frac{1}{2}\right):4\frac{1}{4}$.

2. Упростите выражение: $\frac{2m}{m^2-4}-\frac{2}{m^2-4}:\left(\frac{m+1}{2m-2}-\frac{1}{m-1}\right)$.

Вариант 4.

1. Вычислите значение выражения: $\left(3\frac{1}{3}\cdot 6{,}6+2:12{,}75\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{20}{51}+1\frac{16}{17}\right):2{,}5$.

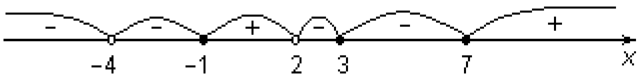
2. Упростите выражение: $\frac{3a}{a^2-9}-\frac{3}{a^2-9}:\left(\frac{a+2}{3a-3}-\frac{1}{a-1}\right)$.

ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Повторение школьной алгебры: «Решение рациональных уравнений и неравенств»

ПРИМЕР 1. Решите неравенство $\dfrac{(x-3)^2(x-7)^3(x+1)}{(x-2)(x+4)^4} \ge 0$.

РЕШЕНИЕ. Это **рациональное** неравенство решим **методом интервалов**. Отметим на числовой прямой «жирными» точками нули числителя (–1; 3 и 7) и «прозрачными» – нули знаменателя (–4 и 2). Если бы заданное неравенство было строгим, нужно было бы все нули сделать «прозрачными». Эти точки разобьют числовую прямую на 6 интервалов:



Выясним знак данной дроби на каждом из этих интервалов, используя пробные числа, принадлежащие интервалам.

Можно поступать иначе. Для этого в выражении в каждом из множителей переменная *x* должна иметь знак «+» ((x – 2), а не (2 – x); (x – 7), а не (7 – x)). Этого всегда можно добиться, умножая неравенство на –1 и меняя одновременно его знак столько раз, сколько надо. Отметив нули выражения на числовой оси, справа налево расставим знаки по следующему правилу: сначала «+», меняем знак на нечетной степени и сохраняем его на четной.

Теперь остается выписать ответ – промежутки, на которых поставлен знак «+», так как знак данного неравенства $\ge$. Важно не забыть $x = 3$.

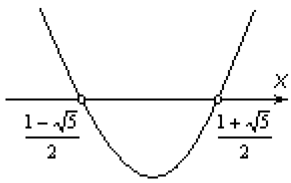
ОТВЕТ: $[-1;\ 2) \cup \{3\} \cup [7;\ +\infty)$.

ПРИМЕР 2. Решите неравенство $x^2 - x - 1 > 0$.

РЕШЕНИЕ. Это **квадратное** неравенство можно решить методом интервалов, но проще – **графически**. Рассмотрим функцию, заданную уравнением $y = x^2 - x - 1$. Графиком ее является парабола.

Заметим, что для нас совершенно не важны точные характеристики параболы (где находится ось, пересечение с *Oy* и т. п.) Достаточно знать, что ее ветви направлены вверх (a > 0) и что она пересекает ось *Ox* в двух точках, являющихся корнями уравнения $x^2 - x - 1 = 0,\ \ x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ \ x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Выполним схематический рисунок:



Из рисунка видно, что квадратичная функция принимает положительные значения вне отрезка, соединяющего ее корни.

$$\left(-\infty;\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right)$$

ОТВЕТ:

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1

1. Решите неравенства:

а) $(4-x)^2-(x+6)^2 \ge (x+5)^2-(2-x)^2$;

б) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2x}{3}>\dfrac{3x-10}{4}$;

в) $(x+2)^2(x-3)(x+6)<0$.

2. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 5(x+1)-9x-3>-6(x+2), \\ 3(3+2x)<7x-2(x-8). \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решите неравенства:

а) $5(x-1)-x(7-x)<x^2$;

б) $\dfrac{x^2}{10}+2>\dfrac{7x}{10}$;

в) $(x+8)^2(10-x)^3>0$.

2. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{x-9}{4}-x<\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3}, \\ 2-x>2x-8. \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решите неравенства:

а) $\dfrac{3-2x}{5}+8>\dfrac{5x+2}{2}-x$;

б) $x(x+1)>2(1-2x-x^2)$;

в) $(x+5)^2(2-x)^3 \ge 0$.

2. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 2(x-1)-3(x-2)<x, \\ 6x-3<17-(x-5). \end{cases}$$

Вариант 4

1. Решите неравенства:

а) $5-\dfrac{x}{3}<\dfrac{7}{2}-\dfrac{4x+1}{8}$;

б) $2x(x-1)<3(x+1)$;

в) $\dfrac{(x+5)^3(x-4)^4}{(7-x)^5} \le 0$.

2. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 3{,}3-3(1{,}2-5x)>0{,}6(10x+1), \\ 1{,}6-4{,}5(4x-1)<2x+26{,}1. \end{cases}$$

Вариант 5

1. Решите неравенства:

а) $(x-3)^2<x(x+2)+3$;

б) $-2x^2+4x-5 \le 0$;

в) $\dfrac{x^2+2x-3}{x+7}<0$.

2. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 5{,}8(1-x)-1{,}8(6-x)<5, \\ 8-4(2-5x)>-(5x+6). \end{cases}$$

ТЕСТ 1. **Квадратное уравнение и его корни.**

1. Какое из уравнений является квадратным:

1) $5x^2-\dfrac{4}{x}=0$; 3) $4x+3=0$;

2) $x^2-2x^3+7=0$; 4) $1{,}2x^2-3x+1=0$.

2. В квадратном уравнении $7x+6-2x^2=0$ укажите его коэффициенты:

1) $a=7,\ b=6,\ c=-2$; 3) $a=-2,\ b=7,\ c=6$;

2) $a=7,\ b=-2,\ c=6$; 4) $a=-2,\ b=6,\ c=7$.

3. Определите, какое из приведённых уравнений является равносильным уравнению $x^2+(2-x)(1+2x)=0$:

1) $3x^2+5x+2=0$; 3) $x^2+3x-2=0$;

2) $-x^2+3x+2=0$; 4) $-x^2-3x+2=0$.

4. Найдите корни уравнения $6b^2-54=0$:

) 0, 3; 2) –3, 3; 3) не имеет корней; 4)3.

5. Какие из чисел - 4, - 2, - 1, 0, 2 являются корнями квадратного уравнения $4x^2+8x=0$:

1) – 2, 0; 2) 0, 2; 3) – 4, - 1; 4) – 4, 0?

6. Решите уравнение $1-4y+3y^2=y^2-4y+9$:

1) – 2, 0; 2) – 2, 2; 3) 2; 4) 0.

1

ТЕСТ 2. **Формула корней квадратного уравнения.**

1. Вычислите дискриминант квадратного уравнения $2x^2 - 5x + 3 = 0$:
1) 49; 2) –1; 3) 1; 4) 25.

2. Определите, имеет ли квадратное уравнение $x^2 + 7x + 6 = 0$ корни и если имеет, то сколько:
1) имеет один корень; 2) не имеет корней; 3) имеет два корня.

3. Найдите корни уравнения $x^2 + 10x + 9 = 0$:
1) –1, –9; 2) –1, 9; 3) –9, 1; 4) 1, 9.

4. Решите квадратное уравнение $4x^2 - x - 3 = 0$:
1) $\frac{3}{4}$,1; 2) –1, $\frac{3}{4}$; 3) $\frac{3}{8}$, 1; 4) $-\frac{3}{4}$, 1.

5.Решите уравнение $5y^2 = 9y + 2$:
1) –2, $\frac{1}{5}$; 2) $-\frac{1}{5}$,2; 3) $\frac{4}{5}$, 2; 4) $\frac{1}{5}$, 2.

6.Найдите корни уравнения $\frac{x^2 + 5x}{2} - 1 = 2$:
1) 1, 6; 2) –1, 6; 3) –1, -6; 4) –6,1.

ТЕСТ 3. **Теорема Виета.**

1. Найдите сумму корней уравнения $x^2 + 18x - 11 = 0$:
1) 18; 2) 11; 3) –18; 4) 1.

2. Найдите произведение корней уравнения $x^2 + 27x - 24 = 0$:
1) 27; 2) –24; 3) 1; 4) 24.

3. Найдите сумму корней уравнения $5x^2 + 10x - 3 = 0$:
1) 10; 2) –10; 3) –2; 4) 2.

4. Найдите произведение корней уравнения $3x^2 - 16x + 9 = 0$:
1) 3; 2) 9; 3) –9; 4) 16.

5. В уравнении $x^2 + px - 16 = 0$ один из корней равен 8. Найдите второй корень и коэффициент p:
1) $x_2 = 2,\ p = -10$; 2) $x_2 = -2,\ p = 6$; 3) $x_2 = -2,\ p = -6$; 4) $x_2 = 2,\ p = 10$.

6. Один из корней уравнения $z^2 + 7z + q = 0$ равен –2. Найдите второй корень и коэффициент q:
1) $z_2 = -5,\ q = 10$; 2) $z_2 = 5,\ q = -10$; 3) $z_2 = 5,\ q = 10$; 4) $z_2 = -5,\ q = -10$.

7. Найдите подбором корни уравнения $x^2 - 15x + 56 = 0$:
1) 4, 14; 2) –7, 8; 3) 5,10; 4) 7,8.

ТЕСТ 4. **Дробно-рациональные уравнения.**

1. Какое из уравнений является дробно-рациональным:
1) $\frac{x^2}{3} - 4x + 1 = 0$; 2) $\frac{2x^2 - 3x}{13} = 1$; 3) $\frac{x-3}{2x+1} = \frac{4}{x}$; 4) $2x + 8 = 14(7 - x)$?

2. Решите уравнение $\frac{x^2}{2} + \frac{x-1}{6} = \frac{1}{2}$:

1) 2; 2) –1; 3) 1; 4) 3.

3. Решите уравнение $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}=0$:

1) –2; 2) 5; 3) 2; 4) –1.

4. Найдите корни уравнения $\frac{5}{x^2+6}=\frac{1}{x}$:

1) 1,5; 2) –2, 3; 3) –3, 2; 4) 2, 3.

5. Определите, при каком значении x значение функции $y=\frac{3x+1}{x+5}$ равно 2:

1) 4; 2) 3; 3) 8; 4) 9.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Вариант 1.

1. Решите уравнение: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2-2}{x^2+x}$.
2. Решите неравенства:

а) $(x-1)(x-2)+3>(x-2)(x-5)+5$; б) $x^2+9<0$.

Вариант 2.

1. Решите уравнение: $\frac{x^2-2x-5}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{x-3}=1$.
2. Решите неравенства:

а) $(x+7)^2-4>(x+6)^2-3$; б) $4x^2+12x+9\le 0$.

Вариант 3.

1. Решите уравнение: $\frac{7}{x+1}+\frac{x+4}{2x-2}=\frac{3x^2-38}{x^2-1}$.
2. Решите неравенства:

а) $(x+1)^2-(x+4)^2\le(6-x)^2-(3-x)^2$; б) $4x-2x^2-5\ge 0$.

Вариант 4.

1. Решите уравнение: $x^4-8x^2-9=0$.
2. Решите неравенства:

а) $(4-x)^2-(x+6)^2\ge(x+5)^2-(2-x)^2$; б) $\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{3}>\frac{3x-10}{4}$.

Вариант 5.

3. Решите уравнение: $x^4-9x^2+20=0$.
4. Решите неравенства:

а) $5(x-1)-x(7-x)<x^2$; б) $\frac{x^2}{10}+2>\frac{7x}{10}$.

Вариант 6.

3. Решите уравнение: $4x^4+11x^2-3=0$.
4. Решите неравенства:

а) $\frac{3-2x}{5}+8>\frac{5x+2}{2}-x$; б) $x(x+1)>2(1-2x-x^2)$.

Вариант 7.

3. Решите уравнение: $3x^4-4x^2+1=0$.
4. Решите неравенства:

а) $5-\frac{x}{3}<\frac{7}{2}-\frac{4x+1}{8}$; б) $2x(x-1)<3(x+1)$.

Вариант 8.

2. Решите уравнение: $\frac{3x-6}{(x-1)(x+2)}=\frac{3x}{x-1}-\frac{2x}{x+2}$.
3. Решите неравенства:

а) $(x-3)^2<x(x+2)+3$; б) $-2x^2+4x-5\le 0$.

Действия над комплексными числами: сложение, вычитание, умножение комплексных чисел.

Задачи на комплексные числа в алгебраической, тригонометрической и показательной формах

1. Даны комплексные числа вычислить сумму $z=z_1+z_2$ аналитически и графически, найти модуль и аргумент z, а так же z_1-z_2; $z_1\cdot z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$

   1. $z_1=5-i$; $z_2=1+3i$ 2. $z_1=3-4i$; $z_2=1+i$

2 Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме, результат записать в тригонометрической, алгебраической и показательной форме

1. $\frac{i-1}{1+i}$ 2. $\left(\frac{1-i}{-2-2i}\right)^{-6}$ 3. $\left(\left(|3-i|\right)(-1+i)\right)^4$

1. $4e^{-\pi i/4}$;

2. $2e^{\pi i/6}$;

3. Выполнить действия. Результат записать во всех формах.

1. $\frac{(5+3i)(5+3i^{15})}{\sqrt{2}(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ)}$; 2. $\frac{(3+2i)^2(2-3i^0)}{1+2i^{31}}$;

4. Выполнить действия, используя тригонометрическую форму:

1. $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{i\sqrt{6}}{6}\right)$; 2. $(1+i\sqrt{3})(-2-2i\sqrt{3})$;

5. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

1) $\sqrt[3]{z_1}$; 2) z_2^5;

1. $z_1=1+i$, $z_2=-\sqrt{3}+i$;

2. $z_1=1-i$, $z_2=-\sqrt{3}-i$;

Вариант 2

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

а) $\frac{2i^5}{1+i^{11}}$; б) $\frac{(1-i)^2}{(1+i)^4}$.

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

а) $7\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^3$; б) $\frac{1+i}{\sqrt{2}\,e^{i\pi/2}}$.

1. Составить квадратное уравнение по его корням $x_1=5-3\,i,\quad x_2=5+3\,i$
2. Выполнить действия:

   $a)\ (2+i)+(-3-i)-(4-3\,i)$ $\quad b)\ \frac{5+3\,i}{5-3\,i}$
3. Построить слагаемые $z_1=-2+i,\quad z_2=2-3\,i$ и их сумму.
4. Выполнить действия:

   $a)\ (\cos 12^\circ+i\sin 12^\circ)^{45}$ $\quad b)\ \left(2\,e^{-\frac{15\pi}{8}}\right)^8$
5. Выполнить действия и записать результат в показательной форме: $z=\frac{1-i}{e^{-\frac{3\pi}{4}i}}$
6. Выполнить действия над комплексными числами:
7. 1) $z_1+z_2;$ 2) $z_1-z_2;$ 3) $z_1*z_2;$ 4) $\frac{z_1}{z_2};$
8. Даны комплексные числа вычислить сумму $z=z_1+z_2$ аналитически и графически, найти модуль и аргумент z, а так же $z_1-z_2;\ z_1\cdot z_2;\ \frac{z_1}{z_2}$

   1. $z_1=5-i;\quad z_2=1+3i$

Вариант 3

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

а) $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$; б) $\frac{(i-1)^3}{i^{12}+i^{31}}$.

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

а) $\frac{24(\cos 75^\circ+i\sin 75^\circ)}{3(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)}$; б) $\frac{e^{-i\pi/3}}{\left(-\sqrt{3}+i\right)^5}$.

1. Решить квадратное уравнение $x^2-6\,x+34=0$
2. Выполнить действия:

   $(3+5\,i)\cdot(3-5\,i)\cdot(-2+i)$
3. Построить комплексные числа $z_1=2-3\,i,\quad z_2=1+2\,i$, а также им сопряженные и противоположные.
4. Выполнить действия:

   $a)\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}$ $\quad b)\ \left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^{-6}$

5. Выполнить действия и записать результат в показательной форме: $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}\ e^{-\frac{\pi}{4}i}}$

6. Даны комплексные числа вычислить сумму $z=z_1+z_2$ аналитически и графически, найти модуль и аргумент z, а так же $z_1-z_2;\ \ z_1\cdot z_2;\ \ \dfrac{z_1}{z_2}$

7. $2.\ z_1=3-4i;\ \ z_2=1+i$ $\qquad$ $17.\ z_1=3+i;\ \ z_2=5-2i$

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

а) $\dfrac{5+i}{2+i\cdot 3}$; $\qquad$ б) $\dfrac{3\,i^{15}+(i\,\sqrt{3})^2}{i^9}$.

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

а) $2\left(\cos\dfrac{11\,\pi}{12}+i\,\sin\dfrac{11\,\pi}{12}\right)^2$; $\qquad$ б) $\dfrac{\left(-\sqrt{2}-i\,\sqrt{2}\right)^6}{12\,e^{-i\,\pi/2}}$.

8. **2.** Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме

9. 1) $\dfrac{1+i}{1-2i}-\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{2}{5}i\right);$

10. 2) $\dfrac{2\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}};$

11. 3) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{20}+i^{17};$

12. Даны комплексные числа вычислить сумму $z=z_1+z_2$ аналитически и графически, найти модуль и аргумент z, а так же $z_1-z_2;\ \ z_1\cdot z_2;\ \ \dfrac{z_1}{z_2}$

$5.\ z_1=1-i;\ \ z_2=7+3i$ $\qquad$ $20.\ z_1=1+3i;\ \ z_2=-2+5i$

Вариант 5

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

а) $2\left(\cos\dfrac{11\,\pi}{12}+i\,\sin\dfrac{11\,\pi}{12}\right)^2$; $\qquad$ б) $\dfrac{\left(-\sqrt{2}-i\,\sqrt{2}\right)^6}{12\,e^{-i\,\pi/2}}$.

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

а) $4\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\,\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^{10}$; $\qquad$ б) $\dfrac{(1+i)^{15}}{2^7\cdot e^{i\,\pi/2}}$.

13. $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{20}+i^{17};$

14. 4) $\dfrac{(1-2i)(1+2i)}{2+i}-i^{12};$

15. 5) $\frac{2(1+i\sqrt{3})}{1-i}-(1+i\sqrt{3});$

6) $\frac{(-2+i)^2}{1+3i}-(0{,}1-0{,}3i);$

1. Даны комплексные числа вычислить сумму $z=z_1+z_2$ аналитически и графически, найти модуль и аргумент z, а так же $z_1-z_2;\ \ z_1\cdot z_2;\ \ \frac{z_1}{z_2}$
2. $14.\ z_1=1+5i;\ \ z_2=2-3i$ $29.\ z_1=-1+3i;\ \ z_2=6-5i$
3. $15.\ z_1=1-4i;\ \ z_2=1+2i$ $30.\ z_1=-3-2i;\ \ z_2=4+3i$

Вариант 6

1. Выполнить действия и записать результат в тригонометрической форме:

а) $\frac{1-2i}{1+3i}$; б) $\frac{(i^9-1)(i^9+1)}{1_i}$.

2. Выполнить действия и записать результат в показательной форме:

а) $3\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^4$; б) $\frac{e^{i\pi/3}\cdot i}{(\sqrt{3}-i)^4}$.

3. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме

1

$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{20}+i^{17};$

$\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^5};$

$\frac{(4-i)^2}{i^8}-8(2-i^{13});$

4. Выполнить действия над комплексными числами:

$z_1+z_2;$ 2) $z_1-z_2;$ 3) $z_1*z_2;$ 4) $\frac{z_1}{z_2};$

$z_1=1+i,\ z_2=-\sqrt{3}+i;$ $z_1=1-\sqrt{3}i,\ z_2=2+2i;$

5Даны комплексные числа вычислить сумму $z=z_1+z_2$ аналитически и графически, найти модуль и аргумент z, а так же $z_1-z_2;\ \ z_1\cdot z_2;\ \ \frac{z_1}{z_2}$

6 $15.\ z_1=1-4i;\ \ z_2=1+2i$ $30.\ z_1=-3-2i;\ \ z_2=4+3i$

7 $15.\ z_1=1-4i;\ \ z_2=1+2i$ $30.\ z_1=-3-2i;\ \ z_2=4+3i$

Процент

Определение. **Процентом** называют **одну сотую** часть числа.

Соответственно получается, что 3% - это три сотых числа, 15% - это пятнадцать сотых, 45% - это 45 сотых, 13,7% - сто тридцать семь тысячных числа
Посмотрим на примере задачи как можно найти процент от числа **тремя способами**:
адача. Найти 5% от числа 15.
Способ 1.
Решение (здесь мы проценты записали в виде обыкновенной дроби)
$$15 * \frac{5}{100} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$
Ответ: 0,75
Способ 2.
Решение (здесь мы проценты записали в виде десятичной дроби)
$$15 * 0{,}05 = 0{,}75$$
Ответ: 0,75
Способ 3.
Решение (здесь мы используем пропорцию)
Решение (здесь мы используем пропорцию)

15 - 100%
x - 5%

$$x = \frac{15*5\%}{100\%} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$
Ответ: 0,75
Вопросы и задания (задачи выполнить 3-мя способами):
1. Запишите 25% в виде обыкновенной дроби, в виде десятичной дроби.
2. Запишите дробь 0,81 в виде процента.
3. Запишите дробь 0,07 в виде процента.
4. Запишите дробь 1,25 в виде процента.
5. Найти 12% от числа 50
6. Найти 8% от числа 75
7. Найти 0,1% от 250
8. Найти 150% от 45
9. Найти 20% от 25% числа 100.
10. В классе 30 человек. Девочки составляют 25%. Сколько мальчиков и девочек в классе?
11. В библиотеке 9500 экземпляров книг. 50% от всего числа составляет научная литература. Сколько всего экземпляров научной литературы в библиотеке?

Вопросы и задания:
1. Сколько процентов составляет число 10 от числа 40?
2. Сколько процентов составляет число 70 от числа 100?
3. Сколько процентов составляет число 0,2 от числа 84. В 11 классе учащиеся писали пробный экзамен по математике. Результаты следующие: на оценку «4» написали 5 учащихся; на оценку «3» написали 2 учащихся; на оценку «2» работу написали 8 учащихся. Какой процент учащихся получили «2», «3» и «4»?

«Преобразование выражений, содержащих радикалы»

Вариант 1.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[3]{-27}$.
2. Решите уравнение: $x^4 = -16$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[3]{1000 \cdot 27 \cdot 8}$; б) $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$; в) $\sqrt[5]{0{,}4^5 \cdot 5^5}$; г) $\frac{\sqrt[3]{250}}{\sqrt[3]{2}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[7]{128}$ или $\sqrt[5]{4}$?

Вариант 2.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[4]{625}$.
2. Решите уравнение: $x^3 = 125$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[3]{64 \cdot 125 \cdot 729}$; б) $\sqrt[5]{\dfrac{243}{32}}$; в) $\sqrt[6]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^6 \cdot 12^6}$; г) $\dfrac{\sqrt[4]{20}}{\sqrt[4]{\dfrac{5}{4}}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[8]{26}$ или $\sqrt[4]{5}$?

Вариант 3.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[7]{-128}$.
2. Решите уравнение: $x^4 = 64$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[4]{0{,}0081 \cdot 0{,}0016 \cdot 625}$; б) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4}$; в) $\sqrt[3]{16^3 \cdot \left(\dfrac{1}{8}\right)^3 \cdot 0{,}125}$; г) $\dfrac{\sqrt[4]{112}}{\sqrt[4]{7}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[5]{5}$ или $\sqrt[3]{3}$?

Вариант 4.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}}$.
2. Решите уравнение: $x^5 = -\dfrac{1}{243}$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[4]{16 \cdot 625 \cdot 81}$; б) $\sqrt[3]{192} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$; в) $\sqrt[4]{27^4 \cdot \left(\dfrac{1}{9}\right)^4 \cdot (0{,}5)^4}$; г) $\dfrac{\sqrt[5]{224}}{\sqrt[5]{7}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[3]{7}$ или $\sqrt[6]{50}$?

Вариант 5.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[5]{-32}$.
2. Решите уравнение: $x^4 = 16$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{32} \cdot 100000}$; б) $\sqrt[3]{18} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}$; в) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 5^9}$; г) $\dfrac{\sqrt{200} - \sqrt{8}}{\sqrt{2}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[5]{-11}$ или $\sqrt[5]{-7}$?

Вариант 6.

1. Найдите значение выражения: $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$.
2. Решите уравнение: $x^5 = -32$.
3. Вычислите: а) $\sqrt[5]{0{,}00001 \cdot 32 \cdot 0{,}00243}$; б) $\sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[5]{2}$; в) $\sqrt[4]{3^8 \cdot 2^{20}}$; г) $\dfrac{\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{4}}$.
4. Какое из чисел больше: $\sqrt[6]{0{,}04}$ или $\sqrt[6]{\dfrac{1}{26}}$?

«Преобразование выражений, содержащих степени с дробными показателями»

ТРЕНИРОВОЧНАЯ ТАБЛИЦА

Вычислите:

8	$\left(\sqrt{32}\right)^{\frac{2}{5}}$	$4^{-\frac{3}{2}}$	$64^{\frac{5}{6}}$	$32^{-\frac{3}{5}}$	$\left(\sqrt{27}\right)^{\frac{2}{3}}$	$32^{\frac{4}{5}}$	$\left(\sqrt{8}\right)^{\frac{2}{3}}$	$16^{-\frac{3}{4}}$
7	$32^{-\frac{3}{5}}$	$\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$125^{-\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$	$16^{-\frac{1}{4}}$	$\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$	$81^{-\frac{1}{4}}$	$\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$
6	$16^{\frac{1}{4}}$	$64^{\frac{1}{2}}$	$8^{\frac{1}{3}}$	$32^{\frac{1}{5}}$	$27^{\frac{1}{3}}$	$81^{\frac{1}{4}}$	$64^{\frac{1}{3}}$	$25^{\frac{1}{2}}$
5	$\left(\sqrt{7}\right)^{2}$	$\left(\sqrt{2}\right)^{8}$	$\left(\sqrt{5}\right)^{4}$	$\left(\sqrt{2}\right)^{10}$	$\left(\sqrt{6}\right)^{4}$	$\left(\sqrt{2}\right)^{6}$	$\left(\sqrt{3}\right)^{4}$	$\left(\sqrt{5}\right)^{0}$
4	$\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$
3	6^{-2}	2^{-4}	3^{-3}	5^{-1}	3^{-4}	2^{-3}	7^{-2}	4^{-1}
2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$	$\left(\frac{3}{5}\right)^{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{4}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{3}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^{2}$
1	3^{4}	4^{3}	2^{4}	5^{3}	2^{5}	3^{3}	5^{0}	2^{3}
	a	b	c	D	e	f	G	h

\Вариант 1.

Вычислите: а) 2^{-1}; б) $27^{\frac{1}{3}}$; в) $\left(\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$; г) $\frac{25\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}}{625\cdot 5^{-3}}$.

Вариант 2.

Вычислите: а) 1^{-7}; б) $27^{\frac{2}{3}}$; в) $9\cdot 0{,}027^{-\frac{1}{3}}+\left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$; г) $48^{\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{5}}$.

Вариант 3.

Вычислите: а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; б) $125^{\frac{2}{3}}$; в) $4^{-2}\cdot\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$; г) $\frac{12^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{9}{4}}}{4^{-\frac{1}{4}}}$.

Вариант 4.

Вычислите: а) $(-1)^{-7}$; б) $36^{-\frac{1}{2}}$; в) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-0{,}75}-12\cdot 0{,}0081^{-0{,}25}$; г) $\sqrt[5]{64}:2^{-\frac{1}{5}}\cdot\left(2^{\frac{1}{10}}\right)^{6}$.

Вариант 5.

Вычислите: а) $5^0 \cdot (-3)^{-2} + (-3)^{-2}$; б) $16^{-\frac{1}{4}}$; в) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\right)^{-\frac{3}{4}}$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{4}{81}\right)^{\frac{2}{3}}$.

Вариант 6.

Вычислите: а) $0^{\frac{5}{6}}$; б) $100^{-\frac{1}{2}}$; в) $2^{\frac{4}{5}} \cdot 2^{\frac{11}{5}}$; г) $\dfrac{2 \cdot 4^{-2} + \left(81^{-\frac{1}{2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{-3}}{125^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} + \left(\sqrt{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$.

Вариант 7.

Вычислите: а) $\left(6 \cdot 2^{-2}\right)^{-1}$; б) $9^{-\frac{3}{2}}$; в) $\left(\left(\frac{9}{4}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

г) $\dfrac{6^{1,7} \cdot 2^{1,3}}{3^{-1,3}}$.

Вариант 8.

Вычислите: а) $(-3)^{-4}$; б) $0.01^{-\frac{1}{2}}$; в) $\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

г) $136^0 + 0{,}027^{-\frac{1}{3}} + \left(0{,}2^{-13} \cdot 125^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4\right)^{-2}$.

«Преобразование выражений, содержащих степени и логарифмы»

Вариант 1.

1. Найдите: а) $log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32}$; б) $log_{49} 7$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $3^{2+log_3 2}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 2 выражение $16b^7 \cdot \sqrt[5]{c}\ (c > 0,\ b > 0)$.
4. Найдите x, если $log_3 x = 2\,log_3 7 + \frac{2}{3} log_3 27 - \frac{3}{2} log_3 16$.

Вариант 2.

1. Найдите: а) $log_5 \frac{1}{25}$; б) $log_{64} 8$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $2^{1+log_2 5}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $\frac{c^4}{\sqrt[3]{100b^4}}\ (c > 0,\ b > 0)$.
4. Найдите x, если $log_2 x = 2\,log_2 5 - \frac{1}{3} log_2 8 + log_2 0{,}2$.

Вариант 3.

1. Найдите: а) $lg\,10000$; б) $log_8 1$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2+log_3 2}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 3 выражение $\frac{27\sqrt{b}}{c^4}\ (c > 0,\ b > 0)$.
4. Найдите x, если $log_5 x = log_5 1{,}5 + \frac{1}{3} log_5 8$.

Вариант 4.

1. Найдите: а) $log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$; б) $lg\,0{,}01$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $\sqrt{2}^{2+log_4 5}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 0,7 выражение $\frac{0{,}49b^3}{c^5 \cdot \sqrt{c}}\ (c > 0,\ b > 0)$.
4. Найдите x, если $lg\,x = 1 + 2\,lg\,3 - \frac{2}{3} lg\,125$.

Вариант 5.

1. Найдите: а) $log_3 \frac{1}{81}$; б) $log_4 \sqrt{2}$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $3^{2+log_3 5}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 5 выражение $25b^3 \cdot \sqrt[4]{c^7}\ (c>0,\ b>0)$.
4. Найдите x, если $log_4 x = 2log_4 10 + \frac{3}{4}log_4 81 - \frac{2}{3}log_4 125$.

Вариант 6.

1. Найдите: а) $log_5 \frac{1}{5}$; б) $log_2 16\sqrt{2}$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $\left(\frac{1}{2}\right)^{1+log_2 3}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 0,2 выражение $\frac{0{,}0016b^4}{c\cdot\sqrt[7]{c^2}}\ (c>0,\ b>0)$.
4. Найдите x, если $log_{\frac{1}{3}} x = \frac{1}{2}log_{\frac{1}{3}} 16 - log_{\frac{1}{3}} 8 + log_{\frac{1}{3}} 28$.

Вариант 7.

1. Найдите: а) $log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$; б) $lg\,0{,}1$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $5^{-1+log_5 2}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $\frac{0{,}001\sqrt[3]{c^2}}{b^3}\ (c>0,\ b>0)$.
4. Найдите x, если $log_4 x = \frac{1}{2}log_4 7 + log_4 32 - \frac{1}{2}log_4 28$.

Вариант 8.

1. Найдите: а) $log_{0,2} 25$; б) $lg\,0{,}001$.
2. С помощью основного логарифмического тождества вычислите: $0{,}2^{1+log_{0,2} 5}$.
3. Прологарифмируйте по основанию 10 выражение $\sqrt{10}b^5c^{-\frac{1}{3}}\ (c>0,\ b>0)$.
4. Найдите x, если $log_3 x = log_3 12 - \frac{1}{2}log_3 32 + \frac{1}{2}log_3 6$.

Логарифмы и их свойства»

Вариант 1.

1. Найдите значение выражения:

а) $\log_4 8$; б) $\log_{0,05} 8000$; в) $\log_{16}\log_4 16$.

1. Найдите значение выражения:

а) $\log_{\frac{1}{8}}\sqrt{8}$; б) $\log_{\sqrt[9]{8}}8$.

1. Найдите значение выражения:

а) $9 \cdot 9^{\log_9 6}$; б) $8^{2\log_8 3}$; в) $49^{\log_7 8}$; г) $3^{2+\log_3 7}$.

1. Найдите значение выражения:

а) $\frac{78}{5^{\log_5 6}}$; б) $\frac{\log_9 2}{\log_{81} 2}$; в) $\frac{\log_3\sqrt{5}}{\log_3 5}$.

1. Найдите значение выражения:

а) $\log_3 6,75 + \log_3 4$; б) $\log_6 234 - \log_6 6,5$;

в) $\frac{\log_4 4}{\log_4 6} + \log_6 0,25$; г) $\frac{\log_2 56}{3+\log_2 7}$.

1. Найдите значение выражения:

а) $\log_5 7 \cdot \log_7 25$; б) $\log_4 13 \cdot \log_{13} 16$.

1. а) Найдите значение выражения $\log_a(a^2b^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{9}$

б) $\log_a(a^{10}b^6)$, если $\log_a b = -1$;

в) Найдите $\log_a \frac{a^9}{b^4}$, если $\log_a b = 9$.

«Решение показательных уравнений и неравенст

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ РАЗДЕЛ

«начальный» уровень:

$5^x > 125$ $\quad 0{,}3^x \le 0{,}0081$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{64}$ $\quad 6^x = 1$ $\quad \left(\frac{3}{4}\right)^x = 1$ $\quad \pi^x = 1$

$2^{2x} < 16$ $\quad 0{,}5^{3x} \ge 8$ $\quad 0{,}1^{4x} = 10$ $\quad 3^{\frac{1}{2}x} = 27$ $\quad 4^{0{,}3x} = 64$ $\quad \left(\sqrt{6}\right)^{7x} = 1$

1 уровень:

$8^{-1} \cdot 2^{3x} = 8$ $\quad \sqrt{3} \cdot 3^{3x} = \frac{1}{3}$ $\quad 27^{-1} \cdot 3^{3x} = \sqrt{3}$ $\quad \sqrt{5} \cdot 5^{2x} = 25^x \cdot \frac{1}{25}$

$\frac{100}{0{,}1^{2x+3}} = 10^{x-1}$ $\quad 0{,}2 \cdot 25^{2-x} = \frac{1}{5^{2x-2}}$ $\quad 32^{x^2-1} = 2^{3x} \cdot 8^{4-x}$ $\quad \frac{27^x}{9^{2x}} = \frac{3^{4+x}}{81}$

2 уровень:

$4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52$ $\quad 9^x + 3 \cdot 3^x - 18 = 0$

$4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$ $\quad 5^x - 7 \cdot 5^{x-2} = 90$

экзаменационный материал:

а) $\begin{cases} \left(\frac{1}{7}\right)^{4x-y} = 49, \\ 5^{9x-y} = \sqrt[4]{5}. \end{cases}$ б) $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$; в) $49^x - 8 \cdot 7^x = -7$;

г) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0{,}01 \cdot \left(10^{x-1}\right)^3$; д) $9^{x+2} - 26 \cdot 3^{x+1} - 3 = 0$.

<u>Вариант 1.</u>

1. Постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = 2^x$, $y = 2^x - 1$ *и* $y = 2^{x+2} - 1$.
2. Решите уравнение: а) $8^{-1} \cdot 2^{3x} = 8$; б) $5^x - 7 \cdot 5^{x-2} = 90$; в) $9^x + 3^{x+1} = 18$.
3. Решите неравенство: а) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \ge 27$; б) $4^x + 16 > 10 \cdot 2^x$.

<u>Вариант 2.</u>

1. Постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$ *и* $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.
2. Решите уравнение: а) $27^{-1} \cdot 3^{3x} = 27$; б) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52$; в) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.
3. Решите неравенство: а) $0{,}5^x \le 2\sqrt{2}$; б) $9^x + 3 \cdot 3^x > 18$.

«Решение логарифмических уравнений и неравенств»

$x - выражение\,с\,переменной,\ a, b - числа$, причем $a > 0, a \neq 1$

1. **Уравнение вида** $log_a x = b$

   Решить равносильное уравнение $x = a^b$;

2. **Уравнение вида** $log_x a = b$

   а) найти ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$;

   б) решить уравнение $x^b = a$;

   в) выбрать из корней уравнения $\in ОДЗ$.

3. **Уравнение вида** $log_a b = x$

   Решить уравнение относительно переменной, входящей в выражение с переменной.

При решении логарифмических уравнений полезно помнить некоторые **свойства логарифмов**:

$a^{log_a b} = b$ - основное логарифмическое тождество

$log_a 1 = 0$; $log_a a = 1$;

$log_a(xy) = log_a x + log_a y$; $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$;

$log_a x^n = n \cdot log_a x$; $log_a \sqrt[n]{x} = \frac{log_a x}{n}$;

$log_{a^n} b = \frac{1}{n} log_a b$; $log_a b = \frac{1}{log_b a}$;

$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$ - формула перехода к новому основанию

Замечание: $lg\,t -$ десятичный логарифм (по основанию 10)

$ln\,t -$ натуральный логарифм (по основанию e)

При решении логарифмических уравнений применяются также методы ***логарифмирования*** и ***потенцирования***.

Вариант 1.

1. Решите уравнения: а) $log_2(x - 15) = 4$; б) $lg(2x) + lg(x + 3) = lg(12x - 4)$;

   в) $lg^2 x + 2lg\,x = 8$.

2.Решите неравенство: $log_{16}(0,6 + 2x) \geq -0,25$.

Вариант 2.

1. Решите уравнения: а) $lg\left(x^2-2x-4\right)=\lg 11$; б) $1+log_2(3x+1)=log_2\left(x^2-5\right)$;

   в) $4lg^2x-2=lg\,x^2$.

2. Решите неравенство: $log_{0,8}(3-5x)\geq 0$.

Вариант 3.

1. Решите уравнения: а) $log_4(5x+6)=0$; б) $log_2(4-x)+log_2(1-2x)=2log_2 3$;

   в) $log_5^2 x-log_5 x^2=3$. б) $log_2(4-x)+log_2(1-2x)=2log_2 3$;

Вариант 4.

1. Решите уравнения: а) $log_3(3x+2)=log_3(x+4)$; б) $lg(x-2)+lg(x-3)=1-lg5$;

   в) $log_3^2 x=4-3log_3 x$.

2. Решите неравенство: $log_4(3-4x)\geq -1$.

1 Вариант

1. Выразите в радианной мере величины углов 64^0; 160^0.
2. Выразите в градусной мере величины углов $\frac{3\pi}{5}$, $1\frac{3}{4}\pi$.
3. Укажите знак числа: а) $\sin\frac{4\pi}{5}tg\frac{\pi}{7}$; б) $\sin 3\cdot\cos 4$.
4. Дано: $\sin\alpha=-\frac{4}{5}$, $180^0<\alpha<270^0$. Найдите $\cos\alpha$ и $ctg\alpha$.

2 Вариант

1. Выразите в радианной мере величины углов 56^0; 170^0.
2. Выразите в градусной мере величины углов $\frac{5\pi}{6}$, $2\frac{1}{6}\pi$.
3. Укажите знак числа: а) $\cos\frac{3\pi}{5}tg\frac{\pi}{9}$; б) $\sin 4\cdot\cos 5$.
4. Дано: $\cos\alpha=-\frac{24}{25}$, $90^0<\alpha<180^0$. Найдите $\sin\alpha$ и $tg\alpha$.

3 Вариант

1. Выразите в радианной мере величины углов 72^0; 140^0.
2. Выразите в градусной мере величины углов $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{23}{8}\pi$.
3. Укажите знак числа: а) $\frac{\cos 200^0\cdot tg300^0}{\sin 400^0}$; б) $\cos 2\cdot tg4$.

4. Найдите $\sin\alpha$ и $tg\alpha$, если известно, что $\cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ и α не лежит во второй четверти.

«Определение значений тригонометрических выражений»

Цель работы: формировать умения с помощью единичной окружности определять значения синуса, косинуса, тангенса и их знаки в четвертях окружности.

Теоретические сведения к практической работе:

Радианная мера

Угол в 1 радиан – это такой центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности.

Радианная и градусная меры связаны между собой зависимостью180^0=π радиан; угол в n^0= радиан.

Значения тригонометрических функций могут быть найдены так, как это делалось в курсе геометрии, из прямоугольного треугольника с гипотенузой равной 1 и по очереди задаваемых углов: 30^0, 45^0, 60^0.

Знаки тригонометрических функций по координатным четвертям:

Номер координатной четверти

I

II

III

IV

sinα

+

+

–

–

cosα

+

–

–

+

tgα

+

–

+

–

ctgα

+

–

+

–

Значения основных тригонометрических функций

Радианная мера угла

0

π

Градусная мера угла

0^0
30^0
45^0
60^0
90^0
120^0
135^0
150^0
180^0

*sin*α

0

1

0

*cos*α

1

0

-1

*tg*α

0

1

–

-1

0

*ctg*α

–

1

0

-1

–

Пример 1. Вычислите: sin405^0.
Решение: полный круг – 360^0 можно «отбросить»: sin405^0=sin(405^0-360^0)=sin45^0=.
Пример 2. Выразите в радианной мере значение угла 36^0.
Решение: чтобы «перевести» градусную меру угла в радианную, необходимо заданное значение умножить на , т.о. получим 36^0=

Пример 3. Выразите в градусной мере значение угла .
Решение: чтобы «перевести» радианную меру угла в градусную, необходимо заданное значение умножить на , т. о. получим

Задания для самостоятельного решения:
1 вариант
№1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 60^0; .
№2. Вычислите:
а)
б)
2 вариант
№1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 180^0; .
№2. Вычислите:
а)
б)
3 вариант
№1. Выразите в радианной (градусной) мере значение угла: 270^0; .
№2. Вычислите:
а)
б)

Контрольные вопросы:
1. Что называется углом в 1 радиан?
2. В каких единицах измеряются углы?
3. Перечислите значения некоторых тригонометрических функций.

«Преобразования тригонометрических выражений»

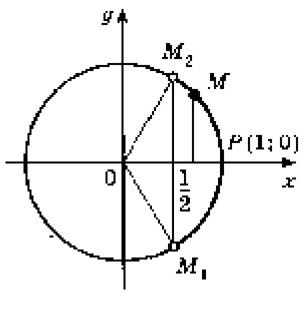
Теоретические сведения к практической работе:
Основные тригонометрические тождества
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\text{tg}\, \alpha \cdot \text{ctg}\, \alpha = 1$
- $\text{tg}\alpha = \sin \alpha \div \cos \alpha$
- $\text{ctg}\alpha = \cos \alpha \div \sin \alpha$
- $1 + \text{tg}^2 \alpha = 1 \div \cos^2 \alpha$
- $1 + \text{ctg}^2 \alpha = 1 \div \sin^2 \alpha$
- Формулы сложения
- $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$
- $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos \alpha$
- $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$
- $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$
- $\text{tg}\, (\alpha + \beta) = (\text{tg}\, \alpha + \text{tg}\, \beta) \div (1 - \text{tg}\, \alpha \cdot \text{tg}\, \beta)$
- $\text{tg}\, (\alpha - \beta) = (\text{tg}\, \alpha - \text{tg}\, \beta) \div (1 + \text{tg}\, \alpha \cdot \text{tg}\, \beta)$
- $\text{ctg}\, (\alpha + \beta) = (\text{ctg}\, \alpha \cdot \text{ctg}\, \beta + 1) \div (\text{ctg}\, \beta - \text{ctg}\, \alpha)$

- ctg (α - β) = (ctg α · ctg β - 1) ÷ (ctg β + ctg α)
-
- **Задания для самостоятельного решения:**
- Вариант 1
1. Упростите выражение:
- а) ; б) .
2. Докажите тождество:
- .
3. Вычислите:
- а) , если ; б) , если .
- 4. Найдите сумму , если
-
- Вариант 2
1. Упростите выражение:
- а) б) .
- 2. Докажите тождество:
- .
- 3. Вычислите:
- а) , если ; б) , если .
- 4. Найдите сумму , если
-
- **Контрольные вопросы:**
1. Что такое тригонометрия?
2. Основные функции тригонометрии
3. Основные тригонометрические формулы
4. Формулы сложения

«Решение тригонометрических уравнений и неравенств»

Теоретические сведения к практической работе:
<u>Опр.</u> Неравенства, содержащие переменную под знаком тригонометрической функции, называются тригонометрическими.
При решении тригонометрических неравенств используют единичную окружность.

Пример Решить неравенство cosx>



По определению cosx – это абсцисса точки единичной окружности. Абсциссу, равную , имеют две точки единичной окружности M_1 и M_2 . Абсциссу, большую имеют все точки M дуги единичной окружности, лежащие правее прямой M_1M_2 . Таким образом, решениями неравенства cosx> являются все числа x из промежутка .
Все решения данного неравенства – множество интервалов
Ответ:

Задание для самостоятельного решения:
Вариант 1.

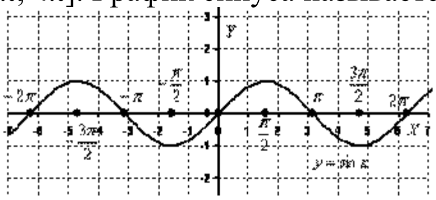
1Решить неравенства:

5. 1) ; 2) ; 3) ; 4) 5)
6.
7. Вариант 2.
8.
9. **Решить неравенства:**
10. 1) ; 2) ; 3) ; 4) 5)
11.
12. ***Контрольные вопросы:***

1. Какие неравенства называются тригонометрическими?
2. Что используют при решении тригонометрических неравенств?

-

«Графики тригонометрических функций»

- **Теоретические сведения к практической работе:**
- *Функции синус и косинус*
- Числовые функции, заданные формулами $y=\sin x$ и $y=\cos x$, называют соответственно синусом и косинусом (и обозначают *sin* и *cos*).
- Область определения этих функций – множество всех действительных чисел. Областью значений функций синус и косинус является отрезок [-1; 1].
  Т.е. $D(\sin)=D(\cos)=R$; $E(\sin)=E(\cos)=[-1; 1]$.
- *Свойства функций синус и косинус:*
- для любого *x* справедливы равенства:
- 1) $\sin(-x)=-\sin x$, $\cos(-x)=\cos x$;
- 2) $\sin(x+2\pi n)=\sin x$, $\cos(x+2\pi n)=\cos x$, где *n* – произвольное целое число.
- *Синусоида*
- Построим график функции синус на отрезке [0; 2π]. Для этого отметим на оси ординат точки (0; -1) и (0; 1), а на оси абсцисс точку с абсциссой 2π (длина отрезка [0; 2π] шесть клеток ~ 6,28). Далее пользуясь вычисленными значениями синуса построим график функции на отрезке [0; 2π]. Вне этого отрезка заметим, что $\sin(x+2\pi n)=\sin x$ и с помощью параллельных переносов вдоль оси О*x* влево и вправо достроим график функции на отрезках [-4π; -2π], [-2π; 0], [2π; 4π]. График синуса называется синусоидой.
- 
- График функции $y=\sin x$
- Для построения графика косинуса необходимо воспользоваться формулой $\cos x=\sin(x+\pi/2)$. Это означает, что график косинуса получается из графика синуса с помощью параллельного переноса на расстояние π/2 влево вдоль оси О*x*. Поэтому график функции $y=\cos x$ также является синусоидой.
- 
- График функции $y=\cos x$
-
- Сведем известные свойства функций в таблицу (всюду полагая, что *n* – произвольное целое число).

- Функция
  - *y=sin x*
  - *y=cos x*
- 1.1 Область определения
  - *R*
  - *R*
- 1.2 Область значений
  - [-1; 1]
  - [-1; 1]
- 2.1 Четность (нечетность)
  - Нечетная
  - Четная
- 2.2 Наименьший положительный период
  - 2π
  - 2π
- 3.1 Координаты точек пересечения графика с осью Ox
  - (π*n*; 0)
  - (π/2+π*n*; 0)
- 3.2 Координаты точек пересечения графика с осью Oy
  - (0; 0)
  - (0; 1)
- 4.1 Промежутки, на которых функция принимает положительные значения
  - (2π*n*; π+2π*n*)
  - (-π/2+2π*n*; π/2+2π*n*)
- 4.2 Промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения
  - (-π+2π*n*; 2π*n*)
  - (π/2+2π*n*; 3π/2+2π*n*)
- 5.1 Промежутки возрастания
  - [-π/2+2π*n*; π/2+2π*n*]
  - [-π+2π*n*; 2π*n*]
- 5.2 Промежутки убывания
  - [π/2+2π*n*; 3π/2+2π*n*]
  - [2π*n*; π+2π*n*]
- 6.1 Точки минимума
  - -π/2+2π*n*
  - π+2π*n*
- 6.2 Минимумы функции
  - -1
  - -1
- 6.3 Точки максимума
  - π/2+2π*n*
  - 2π*n*
- 6.4 Максимумы функции
  - 1
  - 1

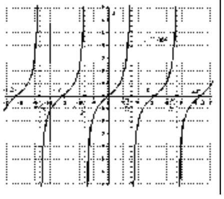
- **Задания для самостоятельного решения:**
- **№1.** Построить схематически косинусоиду на интервале [-3π; 3π] и выполнить следующие упражнения:
- 1) Проиллюстрировать по графику, что:

- а) функция cos x не может принимать значений, превосходящих по абсолютной величине единицу, т. е. $-1 \le \cos x \le 1$;
- б) каждому действительному значению x соответствует только одно значение cos x (свойство однозначности косинуса);
- в) при замене произвольного значения аргумента x противоположным ему значением $-x$ значение функции не изменяется, т. е. $\cos(-x)=\cos x$ (свойство четности косинуса). Как можно использовать свойство четности косинуса при построении его графика;
- г) уравнение $\cos x=0,5$ имеет бесчисленное множество решений. Назвать несколько частных решений этого уравнения.
- 2) Указать интервалы, в которых функция $y=\cos x$ принимает:
- а) положительные значения;
- б) отрицательные значения.
- Какие четверти единичной окружности соответствуют этим интервалам.
- 3) Выделить на оси абсцисс и на единичной окружности интервалы, в которых функция $y=\cos x$:
- а) возрастает;
- б) убывает.
- Проиллюстрировать на графике, что в любом интервале монотонности косинус последовательно принимает все свои возможные значения, каждому из которых соответствует только одно значение аргумента в рассматриваемом интервале.
- **№2.** По графику функции $y=\cos x$ ответить на следующие вопросы:
- 1) Как изменяется cos x, если аргумент x:
- а) увеличивается от -2π до π;
- б) уменьшается от $2,5\pi$ до $1,5\pi$?
- 2) Чему равен косинус числа: а) π; б) 2π; в) $-0,5\pi$; г) -2π?
- 3) Что меньше: а) cos 0,7 или cos 1; б) $\cos(\pi/2+1)$ или $\cos(\pi/2-1)$?
- 4) При каких значениях x функция cos x равна: а) 0; б) 1; в) -1?
- 5) Проиллюстрировать на графике, что не существует значений аргумента x, при которых функция cos x была равна 2.
-
- ***Контрольные вопросы:***

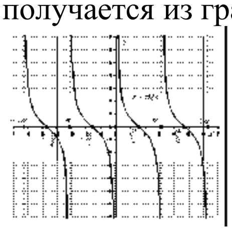
1. Какие функции называют синусом и косинусом?
2. Что является графиком функций синус и косинус?
3. Перечислите свойства функций синус и косинус.

«Тригонометрические функции»

- **Теоретические сведения к практической работе:**
- Числовые функции, заданные формулами $y=tg\,x$ и $y=ctg\,x$, называют соответственно тангенсом и котангенсом (и обозначают *tg* и *ctg*).
- Областью определения функции тангенс является множество всех чисел x, для которых $\cos x \ne 0$, т.е. все числа $x \ne \pi/2+\pi n$, где n - произвольное целое число. Областью определения функции котангенс является множество всех чисел x, для которых $\sin x \ne 0$, т.е. все числа $x \ne \pi n$, где n - произвольное целое число. Область значений тангенса (котангенса) – вся числовая прямая.
- *Свойства функций тангенс и котангенс:* для любого x справедливы равенства:
- 1) $tg\,(-x)=-tg\,x$, $ctg\,(-x)=-ctg\,x$; 2) $tg\,(x+\pi n)=tg\,x$, $ctg\,(x+\pi n)=ctg\,x$, где n – произвольное целое число.



- Построение графика тангенса на интервале (-π/2; π/2) аналогично построению синуса. Вследствие тождества $tg\ (x+\pi n)=tg\ x$ график тангенса на всей области определения получается из графика на интервале (-π/2; π/2) параллельным переносом вдоль оси



Ox влево и вправо на π, 2π и т.д. График функции тангенс называют тангенсоидой.
- Для построения графика $y=ctg\ x$ воспользуемся тождеством $ctg\ x=-tg\ (x+\pi/2)$. Из этого тождества следует, что для построения графика котангенса необходимо сдвинуть график тангенса на π/2 влево вдоль оси Ox и отразить полученную кривую относительно оси Ox.
- Сведем известные свойства функций в таблицу (всюду полагая, что n – произвольное целое число).

  - Функция
  - *y=tg x*
  - *y=ctg x*
  - 1.1 Область определения
  - (-π/2+πn; π/2+πn)
  - (πn; π+πn)
  - 1.2 Область значений
  - *R*
  - *R*
  - 2.1 Четность (нечетность)
  - Нечетная
  - Нечетная
  - 2.2 Наименьший положительный период
  - π
  - π
  - 3.1 Координаты точек пересечения графика с осью Ox
  - (πn; 0)
  - (π/2+πn; 0)
  - 3.2 Координаты точек пересечения графика с осью Oy
  - (0; 0)
  - Нет
  - 4.1 Промежутки, на которых функция принимает положительные значения
  - (πn; π/2+πn)
  - (πn; π/2+πn)
  - 4.2 Промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения
  - (-π/2+πn; πn)
  - (-π/2+πn; πn)
  - 5.1 Промежутки возрастания
  - (-π/2+πn; π/2+πn)
  - Нет
  - 5.2 Промежутки убывания
  - Нет
  - (πn; π+πn)
  - 6.1 Точки минимума
  - Нет
  - Нет
  - 6.2 Точки максимума
  - Нет
  - Нет
- **Задания для самостоятельного решения:**

- **№1.** Построить схематически тангенсоиду на интервале (-3π/2; 3π/2). При построении:
- 1) отметить на оси абсцисс точки, соответствующие числам:
- -1,5π; -π; -0,5π; 0,5π; π; 1,5π (за единицу масштаба принять отрезок, равный 1 см);
- 2) через точки (-1,5π; 0); (-0,5π; 0); (0,5π; 0) и (1,5π; 0) провести (пунктиром) прямые, параллельные оси ординат;
- 3) отметить точки тангенсоиды с ординатами ±1;
- 4) вычертить (от руки) тангенсоиду.
- **№2.** Построить на одном чертеже графики функций: $y=x$; $y=\sin x$ и $y=\text{tg}\, x$, если $0<x<\pi/2$. Пользуясь чертежом, проиллюстрировать неравенство $\sin x<x\ x$.
- ***Контрольные вопросы:***

1. Какие функции называют тангенсом и котангенсом?
2. Что является графиком функций тангенс и котангенс?
3. Перечислите свойства функций тангенс и котангенс.

«Построение графика квадратичной функции»

1.Построить график функции.

2.Найтиf(5),f(-5),f(2,5),f(-2,5).

3.Указать значения x, при которых y>0,y<0.

4.Указать промежутки убывания, возрастания функции.

5.Построить график функции, преобразовав график $У = x^2$

№ варианта	Функция для задания №1 – 3	Функция для задания №4	Функция для задания №5
	$У = 3x^2+ 2x - 5$	$У = x^2+ 4$	$У = (x - 1)^2$
	$У = -x^2+ 2x + 8$	$У = x^2- 4$	$У = (x + 1)^2$
	$У = 9x^2 - 6x + 1$	$У = x^2+ 1$	$У = (x - 2)^2$
	$У = x^2 -8x + 7$	$У = x^2- 1$	$У = (x +2)^2$
	$У = x^2 -6x - 16$	$У = x^2+ 2$	$У = (x - 3)^2$
	$У = -x^2-8x - 7$	$У = x^2- 2$	$У = (x + 3)^2$
	$У = -x^2-6x + 16$	$У = x^2+ 3$	$У = (x - 4)^2$
	$У = 3x^2-2x + 5$	$У = x^2- 3$	$У = (x +4)^2$
	$У = -x^2-2x + 8$	$У = x^2+ 5$	$У = (x – 0,5)^2$
	$У = x^2+2x -3$	$У = x^2-5$	$У = (x + 0,5)^2$
	$У = -x^2-2x + 15$	$У = x^2+ 0,5$	$У = (x – 1,5)^2$

*$У = 5x^2$-8x – 4	*$У = -x^2$+ 4	* $У = (x - 1)^2 + 2$	
	*$У = 5x^2$-8x + 3	*$У = -x^2$+ 1	* $У = (x + 1)^2$ - 2
	*$У = 3x^2$+8x - 3	*$У = -x^2$+ 2	* $У = (x - 1)^2$ - 2
	*$У = -5x^2$-8x + 4	*$У = -x^2$+ 5	* $У = (x + 1)^2$ +2
	* $У = -3x^2$+8x + 3	*$У = -x^2$- 5	* $У = (x - 2)^2$ - 1

Задания, отмеченные *предназначены для учащихся, проявляющих способности к математике

Построить график функции.	Построить график функции.
Найтиf(5),f(-5),f(2,5),f(-2,5).	Найтиf(5),f(-5),f(2,5),f(-2,5).
Указать значения х, при которых $y>0, y<0$.	Указать значения х, при которых $y>0, y<0$.
Указать промежутки убывания, возрастания функции.	Указать промежутки убывания, возрастания функции.
* $У = -3x^2$+8x + 3	*$У = -5x^2$-8x + 4
5.Построить график функции, преобразовав график $У = x^2$	5.Построить график функции, преобразовав график $У = x^2$
*$У = -x^2$– 5	*$У = -x^2$+ 5
* $У = (x - 2)^2$ – 1	* $У = (x + 1)^2$ +2
Построить график функции.	Построить график функции.
Найтиf(5),f(-5),f(2,5),f(-2,5).	Найтиf(5),f(-5),f(2,5),f(-2,5).
Указать значения х, при которых $y>0, y<0$.	Указать значения х, при которых $y>0, y<0$.
Указать промежутки убывания, возрастания функции.	Указать промежутки убывания, возрастания функции.
*$У = 3x^2$+8x – 3	*$У = 5x^2$-8x + 3
5. Построить график функции, преобразовав график $У = x^2$	5. Построить график функции, преобразовав график $У = x^2$
*$У = -x^2$+ 2	*$У = -x^2$+ 1
* $У = (x - 1)^2$ – 2	* $У = (x + 1)^2$ - 2
Построить график функции.	Построить график функции.

Найтиf(5),f(-5),f(2,5),f(-2,5). Указать значения х, при которых у>0,у<0. Указать промежутки убывания, возрастания функции. *У = $5х^2$-8х – 4 Построить график функции, преобразовав график У = $х^2$ *У = $-х^2$+ 4 * У = $(х - 1)^2$ + 2	Найтиf(5),f(-5),f(2,5),f(-2,5). Указать значения х, при которых у>0,у<0. Указать промежутки убывания, возрастания функции. У = $-х^2$-2х + 15 Построить график функции, преобразовав график У = $х^2$ У = $х^2$+ 0,5 У = $(х – 1,5)^2$

Построение графиков функций

Учебные задачи:

1. Повторить основные понятия по теме «Функция».
2. Повторить свойства функции.
3. Применять свойства функции к построению графиков функций.

Обеспеченность занятия:

1. Тетрадь для практических занятий
2. Раздаточные материалы *(инструкционные карты)*
3. Ручка.
4. Карандаш простой.
5. Чертежные принадлежности: *(линейка)*.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

Числовой функцией называется такое соответствие между числовым множеством X и множеством R действительных чисел, при котором каждому числу из множества X сопоставляется единственное число из множества R. Множество X называют *областью определения функции*. Функции обозначают буквами *f, g, h* и др. Если *f* – функция, заданная на множестве X, то действительное число у, соответствующее числу х их множества X, часто обозначают *f(x)* и пишут *у = f(x)*.

Переменную х при этом называют аргументом. Множество чисел вида f(x) называют *областью значений функции.*

Основные свойства функции:

1. Четность и нечетность. Функция y=f(x) называется четной, если для любых значений x из области определения f(-x)=f(x), и называется нечетной, если f(-x)=-f(x). В противном случае функция y=f(x) называется функцией общего вида.
2. Монотонность. Функция y=f(x) называется возрастающей (убывающей) на некотором промежутке X из области определения, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее (меньшее) значение функции.
3. Ограниченность. Функция y=f(x) называется ограниченной на некотором промежутке X из области определения, если существует число M>0, такое, что $|f(x)|\le M$ для любого $x\in X$.
4. Периодичность. Функция y=f(x) называется периодической с периодом T>0, если для любых значений x из области определения f(x+T)=f(x-T)=f(x).

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Сформулируйте определение числовой функции.
2. Что называют областью определения функции?
3. Что называют графиком функции?
4. Перечислите способы задания функции.
5. Какую функцию называют возрастающей (убывающей)?
6. Какую функцию называют четной (нечетной)?
7. Какое число называют наименьшим (наибольшим) значением функции?
8. Какая функция называется ограниченной?

Задания для практического занятия:

<u>**I вариант**</u>

<u>**II вариант**</u>

1. *Найти область определения функции*:

1) $y=\sqrt{x^2-8x+15}$;

2) $y=\frac{3x-2}{4x^2-4}$.

1) $y=\sqrt{x^2+x-6}$;

2) $y=\frac{5x^2+1}{x^2-9}$.

2. Установить четность или нечетность функции

$y=\frac{12}{x}-1$

$y=\frac{4}{x}$

3. *Построить график функции*:

1) $y=x^2+x-6$

2) $y=\frac{12}{x}-1$

1) $y=x^2-4$

2) $y=\frac{4}{x}$.

Инструкция по выполнению практического занятия

При выполнении заданий рассмотрите примеры:

Пример 1. Найти область определения функции

5. $1¿\, y=\frac{15}{x+6}$
6. $x+6\neq0$
7. $x\neq-6$
8. $D(y)=(-\infty,-6)\tilde{N}¿$ $-6,\infty$).
9. 2) $y=\frac{x+13}{x^2-7x+12}$

10. $x^2-7x+12\neq 0$

11. $x\neq 3, x\neq 4$

12. $D(y)=(-\infty,3)\tilde{N}(3,4)\tilde{N}¿$ $4,\infty$).

13. 3) $y=\sqrt{x^2-81}$

14. $x^2-81\geq 0$

15. $(x-9)(x+9)\geq 0$

16. $D(y)=(-\infty,-9]\tilde{N}¿$

Пример 2. Установить четность или нечетность функции.

$1) y=x^2+6$

$y(-x)=(-x)^2+6=x^2+6=y(x)$

$\Rightarrow$ *функция четная*

$2) y=\sin x+2x$

$y(-x)=\sin(-x)+2(-x)=-\sin x-2x=-(\sin x+2x)=-y(x)$

$\Rightarrow$ *функция нечетная*

$3) y=\dfrac{x+2}{x^2-16}$

$y(-x)=\dfrac{(-x)+2}{(-x)^2-16}=\dfrac{-x+2}{x^2-16}$

$\Rightarrow$ *функция общего вида*

Порядок выполнения отчёта по практической работе:

1. Выполнить задания 1-3.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала (устно).
3. Оформить отчёт по практической работе.

Образец отчёта по практической работе:

Раздел.
Тема.
Учебная цель.
Название практической работы.
Решение заданий практической работы.
Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Степени и корни. Степенные функции

Учебные задачи:

1. Повторить свойства степени с натуральным показателем и целым показателем.
2. Выработать навык работы со степенями с рациональным показателем.
3. Учить рассуждать и логически мыслить.

Обеспеченность занятия:

1. Тетрадь для практических занятий
2. Раздаточные материалы *(инструкционные карты)*
3. Ручка.
4. Карандаш простой.

Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

Степень с натуральным показателем

<u>Определение</u> *Степенью числа a с натуральным показателем n(n>1) называется произведение n сомножителей, каждый из которых равен a.*

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}, a^1 = a$

Пример 1. Вычислить: $\dfrac{15^3 \cdot 21^2}{35^2 \cdot 3^4}$.

$15^3 21^2$
(3 5) ^{3}
(3 7) ^{2} $_3$3
$5^3 3^2$
7 ^{2} $_3$5
$5^3 7^2$
3 5 15.
$35^2 3^4$
(5
7) ^{2} 3^4
$5^2 7$ $^2 3^4$
3^4
$5^2 7^2$

<u>Степень с целым показателем</u>

<u>Определение:</u> Если *a≠0,* то $a^0=1$. Выражение 0^0 не имеет смысла.

<u>Определение:</u> Если *a≠0*, и *n*– натуральное, то $a^{-n} = \dfrac{1}{n}$.
Выражение 0^{-n} не имеет смысла

Пример 1. Вычислить: $\dfrac{18^{-3} \cdot 3^7}{2^{-5}}$.

$$\frac{18^{-3} \cdot 3^7}{2^{-5}} = \frac{2^5 \cdot 3^7}{18^3} = \frac{2^5 \cdot 3^7}{(2 \cdot 3^2)^3} = \frac{2^5 \cdot 3^7}{2^3 \cdot 3^6} = 2^2 \cdot 3 = 12$$.

Пример 2. Упростите: $\dfrac{\begin{matrix} a \\ (¿¿ -2 \cdot b^3)^{-3} \\ (a \cdot b)^{-4} \end{matrix}}{¿}$

$$\begin{matrix} a \\ (¿¿-2 \cdot b^3)^{-3} = \dfrac{a^4 \cdot b^4}{a^6 \cdot b^{-9}} = \dfrac{b^{13}}{a^2} = a^{-2} \cdot b^{13} \\ \dfrac{(a \cdot b)^4}{¿} \end{matrix}$$

Степень с рациональным показателем

Определение. *Если a>0 и x– рациональное число, представленное дробью* $\dfrac{m}{n}$,

где m – целое, и n≥2 – натуральное число, то: $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$;
если $a \neq 0$ и $x > 0$ *, то a^x 0.*

Например:
$a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$,
$b^{\frac{-3}{4}} = \sqrt[4]{b^{-3}} = \sqrt[4]{\frac{1}{b^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{b^3}} = (\frac{1}{b})^{\frac{3}{4}}$

Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Что называют степенью с натуральным показателем?
2. Что называют степенью с целым показателем?
3. Что называют степенью с рациональным показателем?
4. Свойства степени?
5. Чему равно выражение 0^0?
6. Какой вид имеет рациональное число?
7. В виде обыкновенной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби можно представить рациональное или иррациональное число?
8. В виде бесконечной десятичной непериодической дроби какое число можно представить?
9. Все свойства степени с натуральным показателем верны и для степени любым рациональным показателем, но с каким основанием?
10. Какая ошибка в записи свойств степени?

$a^p \cdot a^q = a^{p-q}$
$a^p \div a^q = a^{p+q}$
$a(¿^{pq}) = a^{p \cdot q}$
¿
$(ab)^p = a^p b^p$
$(\frac{a}{b})^p = \frac{b^p}{a^p}$

11. Найди ошибку в записи $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{16^4}$.
12. Согласны ли вы с этим решением $27^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{27^{-2}} = \sqrt[3]{3^{-6}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$?

Задания для практического занятия:

<u>I вариант</u>
<u>II вариант</u>

1. Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем:
а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{17}$; в) $\sqrt[8]{a^{12}}$;

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt[5]{16}$; в) $\sqrt[7]{m^{11}}$;
2. Представьте выражение в виде корня из числа или выражения
а) $7^{\frac{3}{5}}$; б) $(6a)^{\frac{3}{7}}$; в) $(x-y)^{\frac{1}{3}}$
а) $9^{\frac{8}{11}}$; б) $(5x)^{\frac{4}{9}}$; в) $(a-b)^{\frac{1}{3}}$;
3.Вычислите:
а) $16^{\frac{1}{4}}$; б) $8^{\frac{2}{3}}$
в) $3^{-2} \cdot 81^{\frac{1}{4}}$; г) $0{,}01^{-\frac{1}{2}}$;

а) $121^{\frac{1}{2}}$; б) $8^{\frac{4}{3}}$

в) $2^{-3}\cdot 16^{\frac{1}{2}}$; г) $0{,}001^{-\frac{1}{3}}$;

4.Упростите выражения

1. $81^{\frac{3}{4}}$ 2. $2\cdot 25^{-\frac{1}{2}}$ 3. $2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{4}{3}}$ 4. $\left(3^{-2}\right)^{3}$ 5. $2^{3}\cdot 5^{3}$ 6. $\left(10^{3}\right)^{4}\cdot 10^{-12}$ 7. $16^{3}\cdot 2^{-6}$ 8. $\frac{0.001}{10^{-6}}$

5.Выполните действия:

1) $2\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}$ 2) $\left(\frac{2^{\frac{2}{3}}}{4^{\frac{5}{6}}}\right)^{3}$ 3) $\sqrt{\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{9}}{\sqrt[4]{27}}}$ 4) $\frac{a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{5}{4}}}{a^{\frac{2}{3}}a^{-\frac{1}{3}}}$

5) $\left(\left(a^{-2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$ 6) $\frac{3^{\frac{1}{3}}\cdot 7^{\frac{1}{3}}}{9^{\frac{1}{3}}}$ 7) $\left(27^{\frac{2}{5}}\cdot 2^{\frac{1}{5}}\cdot 2\right)^{\frac{5}{6}}$ 8) $\left(72^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot 36^{\frac{1}{6}}:2^{\frac{4}{3}}$

Порядок выполнения отчёта по практической работе:

1. Выполнить задания 1-3.
2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала (устно).
3. Оформить отчёт по практической работе.

Образец отчёта по практической работе:

Тема.
Учебная цель.
Название практической работы.
Решение заданий практической работы.
Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

Преобразование графиков тригонометрических функций

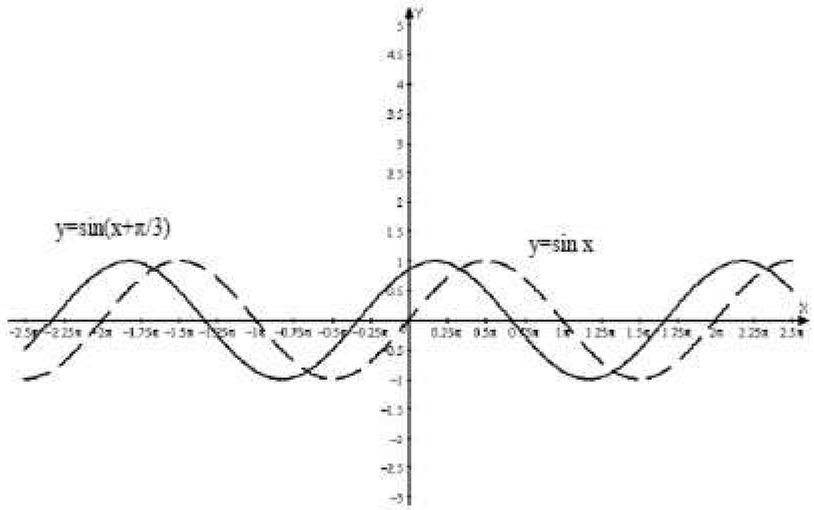
Краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме практического занятия

<u>Пример1.</u>

Построить график функции $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$

Решение:

Искомый график получается из графика функции $y=\sin x$ в результате параллельного переноса вдоль оси абсцисс в отрицательном направлении на $\frac{\pi}{3}$ единиц.

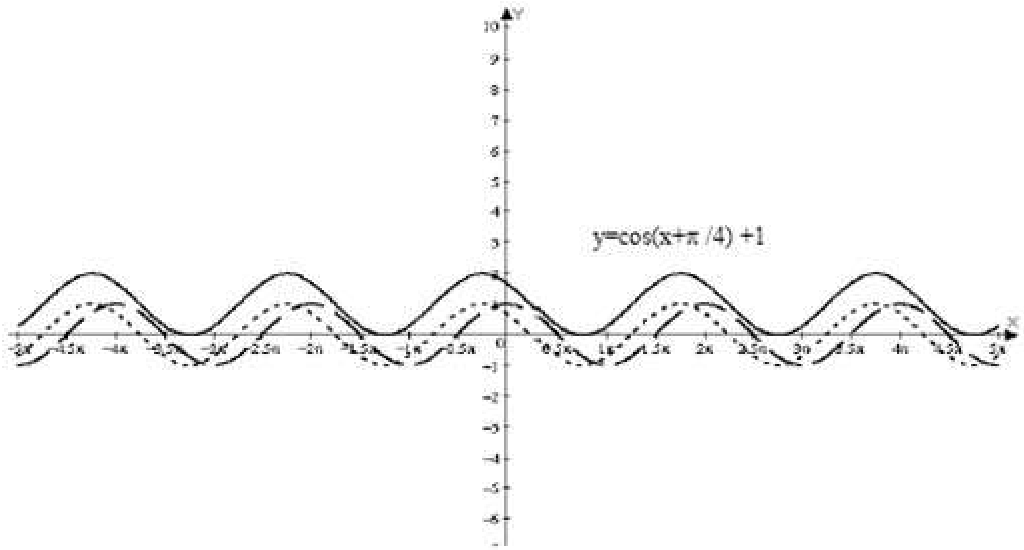


Пример2.

Построить график функции $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1$

Решение:

В начале график функции $y=\cos x$ перенесем параллельно вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{4}$ единиц в отрицательном направлении. Затем последний график перенесем параллельно вдоль оси ординат на 1 единицу вверх.

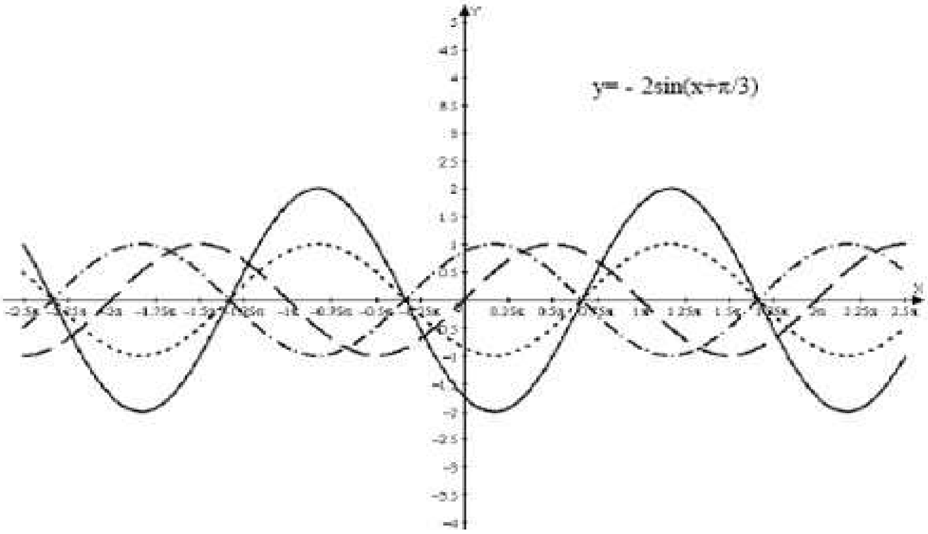


Пример 3.

Построить график функции $y=-2\sin(x+\frac{\pi}{3})$

Решение:

Первый шаг – параллельный перенос графика функции $y=\sin x$ вдоль оси абсцисс на $\frac{\pi}{3}$ единиц в отрицательном направлении. Получим график $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. Затем симметрия относительно оси абсцисс. Получим график $y=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$ Теперь растянем последний график от оси абсцисс в два раза (увеличим расстояние от каждой точки графика $y=-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ до оси абсцисс в два раза).



Вопросы для закрепления теоретического материала к практическому занятию:

1. Как называется график функции *y=sin x.* Какими свойствами обладает эта функция?
2. Как называется график функции *y= cos x.* Какими свойствами обладает эта функция?
3. Как называется график функции *y= tg x.* Какими свойствами обладает эта функция?
4. Как называется график функции *y= ctg x.* Какими свойствами обладает эта функция?
5. Перечислите основные преобразования графиком функций.

Задания для практического занятия:

Постройте графики функций:

1. $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$
2. $y=\cos x-1$
3. x $-¿$ $y=ctg¿$
4. $y=\cos 3x$
5. $y=\frac{-1}{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$
6. $y=\left|2\cos(3x+\frac{\pi}{6})\right|$

Инструкция по выполнению практического занятия

1. Познакомиться с конспектами лекций и краткой теоретической справкой
2. Ответить устно на контрольные вопросы.
3. Используя конспекты лекций, решить практические задания.

Порядок выполнения отчёта по практической работе:

1. Выполнить задания 1-3.

2. Ответить на вопросы для закрепления теоретического материала (устно).
3. Оформить отчёт по практической работе.

Образец отчёта по практической работе:

Тема.
Учебная цель.
Название практической работы.
Решение заданий практической работы.
Ответы на вопросы для закрепления теоретического материала.

"Логарифмическая функция".
<u>Образец выполнения заданий.</u>

1. Построить график функции и записать его свойства: у= $\log_2 x$

Решение:

1. <u>Зададим таблицу значений</u>: 2. <u>Построим график функции</u>:
3. <u>Свойства</u>
1). ООФ $x>0$
2). Множество значений у » R
3). Монотонность: функция ↑

2. Решить уравнение: $\log_4(3x-5)=1$

Решение:

$\log_4(3x-5)=1$, *используя свойство логарифма* $p=\log_a a^p$, *получаем*
$\log_4(3x-5)=\log_4 4^1$
$\log_4(3x-5)=\log_4 4$, *по теореме получаем*
3x-5=4
3x=4+5
3x=9
x=9:3
<u>x=3</u>

Проверка:

x=3 $\log_4(3\cdot 3-5)=1$
$\log_4 4=1$
1=1 - верно
Ответ: x=3

$x-2$
¿
¿
3. Решить уравнение: $\log_2$ ¿

. Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{2}}(6x+2)\geq -3$

Решение:

$\log_{\frac{1}{2}}(6x+2)\geq -3$ $OO\Phi$ $6x+2>0$ $6x>-2$ $x>\frac{-1}{3}$

$\log_{\frac{1}{2}}(6x+2)\geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ (*использовали свойство логарифма* $p=\log_a a^p$)
$\log_{\frac{1}{2}}(6x+2)\geq \log_{\frac{1}{2}} 8$, *т.к. функция* ↓ , то знак меняем на противоположный
$6x+2\leq 8$

$6x \le 6$

$x \le 1$

Находим общее между этим решением и ООФ

$\frac{-1}{3} 1 x$

Ответ: $\frac{-1}{3} < x \le 1$

5. Решить неравенство: $\log_6(3-11x)<2$

Решение:

$\log_6(3-11x)<2$ $ООФ$ $3-11x>0$ $-11x>-3$ $x<\frac{3}{11}$

$\log_6(3-11x)<\log_6 6^2$ $(\textit{использовали свойство логарифма } p=\log_a a^p)$

$\log_6(3-11x)<\log_6 36$, $\textit{т.к. функция} \uparrow$, то знак не меняем

$3-11x<36$

$-11x<33$

$x>-3$

Находим общее между этим решением и ООФ

$-3 \frac{3}{11} x$

Ответ: $-3<x<\frac{3}{11}$

Решить самостоятельно

I вариант

II вариант

1. Построить график функции и записать его свойства:

$$y=\log_{\frac{1}{3}} x$$

1. Построить график функции и записать его свойства:

$$y=\log_3 x$$

2. Решить уравнение:

$\log_5(3x+1)=2$

2. Решить уравнение:

$\log_7(x+3)=2$

3. Решить уравнение:

$$\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$$

3. Решить уравнение:

$$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3$$

4. Решить неравенство:

$\log_3(x-1) \le 2$

4. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \ge -2$$

5. Решить неравенство:

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)>-2$$

5. Решить неравенство:

$$\log_3(2x-7)>1$$

Решить неравенство: $\log_{\frac{1}{2}}(6x+2)\geq -3$

Решение:

$$\log_{\frac{1}{2}}(6x+2)\geq -3\ ООФ\ 6x+2>0\ 6x>-2\ x>\frac{-1}{3}$$

$\log_{\frac{1}{2}}(6x+2)\geq \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ $(\textit{использовали свойство логарифма } p=\log_a a^p)$

$\log_{\frac{1}{2}}(6x+2)\geq \log_{\frac{1}{2}}8,\ \textit{т.к.функция}\downarrow$, то знак меняем на противоположный

$6x+2\leq 8$

$6x\leq 6$

$x\leq 1$

Находим общее между этим решением и ООФ

$\frac{-1}{3}\ 1\ x$

Ответ: $\frac{-1}{3}<x\leq 1$

5. Решить неравенство: $\log_6(3-11x)<2$

Решение:

$$\log_6(3-11x)<2\ ООФ\ 3-11x>0\ -11x>-3\ x<\frac{3}{11}$$

$\log_6(3-11x)<\log_6 6^2$ $(\textit{использовали свойство логарифма } p=\log_a a^p)$

$\log_6(3-11x)<\log_6 36,\ \textit{т.к.функция}\uparrow$, то знак не меняем

$3-11x<36$

$-11x<33$

$x>-3$

Находим общее между этим решением и ООФ

$-3\ \frac{3}{11}\ x$

Ответ: $-3<x<\frac{3}{11}$

Решить самостоятельно

I вариант

II вариант

1. Построить график функции и записать его свойства:

$$y=\log_{\frac{1}{3}}x$$

1. Построить график функции и записать его свойства:

$$y=\log_3 x$$

2. Решить уравнение:

$\log_5(3x+1)=2$

2. Решить уравнение:
$\log_7(x+3)=2$

3. Решить уравнение:
$$\log_2(x-5)+\log_2(x+2)=3$$

3. Решить уравнение:
$$\log_2(x+1)+\log_2(x+3)=3$$

4. Решить неравенство:
$\log_3(x-1)\le 2$

4. Решить неравенство:
$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\ge -2$$

5. Решить неравенство:
$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)>-2$$

5. Решить неравенство:
$$\log_3(2x-7)>1$$

Вычисление пределов с помощью формул первого и второго замечательных пределов. Вычисление пределов функции с помощью раскрытия неопределённостей.

Вариант 1

1. Вычислить предел функции:
$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-8x+15}$ $\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$.
2. Вычислить предел функции:
$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+5}{3x-6}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$.
3. Вычислить предел функции:
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 17x}{\sin 12x}$.
4. Вычислить предел функции:
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$.

Вариант 2

1. Вычислить предел функции:
$\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2+x-20}{x^2-16}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$.
2. Вычислить предел функции:
$\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x+6}{2x-4}$ $\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$.
3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 13x}.$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{12}{x}\right)^{\frac{x}{4}}.$$

Вариант 3

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 7}\frac{x^2-49}{x^2-5x-14}.\quad \lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+4}{2x-6}.\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{14}{x}\right)^{2x}$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\sin 4x}.\quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{15}{x}\right)^{\frac{x}{5}}.$$

Вариант 4

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-12x+35}{x^2-25}.\quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-1}{2x-10}.\quad \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 8x}{\sin 19x}.$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{2x}.$$

Вариант 5

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-3x-18}{x^2-36}.\quad \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x-3}{3x-12}.\quad \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 14x}.\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$$

4. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)^{3x}.$$

Вариант 6

1. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 9}\frac{x^2-81}{x^2-11x+18}.\quad \lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$$

2. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 6}\frac{3x-5}{2x-12}.\quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$$

3. Вычислить предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 19x}{\sin 3x}.$$

Дополнительное задание

а) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

в) $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$; г) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{6x-4}$.

8. а) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$; б) $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x}-2}$;

в) $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,5x}{tg\,3x}$; г) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+4}\right)^{2x-1}$.

9. а) $\lim_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$;

в) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{tg\,3x}$; г) $\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{3}{x}}$.

10. а) $\lim_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+4x+3}$; б) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$;

в) $\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 2x}{x}$; г) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+2}{4x-1}\right)^{2x+3}$.

1). $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{(k+2)x}$, 2) $\lim_{x\to 0}\frac{k\,x^2}{\sin^2 5x}$, 3) $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,(kx+3x)\,x^2}{5x}$,

4) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}$, 5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx-\sin 5x}{kx}$, 6) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos kx}{x}$

7) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-8x+15}$ 8) $\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{3x-6}$ 9) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 17x}{\sin 12x}$ 10) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$

Найти указанные пределы.

1\. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{4x^2+x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x+3}$.

2\. а) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-3x+7}{(x-7)^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}}$.

3\. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{5x^2+4x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x-x^2}{4x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{4x}$.

4\. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3}{4x^3+5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} tg 2x\cdot ctg 4x$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{3}{x}}$.

5\. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+1}\right)^{2x+2}$.

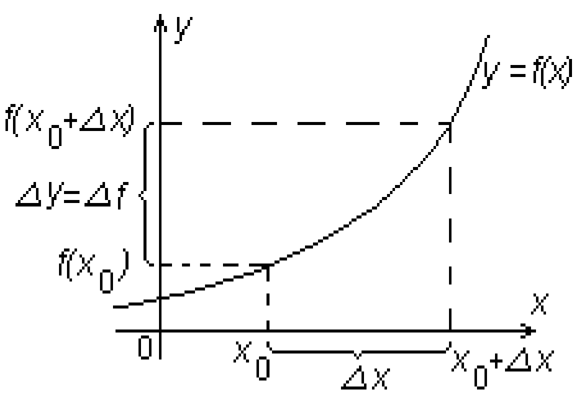
6\. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-10x+8}{x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-2x}{3x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{arctg 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x}$.

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{9x-4}\right)^{2x}$ Ответ: 0 е) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$ Ответ: 0

«Вычисление производной с помощью определения»

ОБУЧАЮЩИЕ ТАБЛИЦЫ



1. Приращение аргумента и приращение функции.

На рисунке $\Delta x = (x_0 + \Delta x) - x_0$ - приращение аргумента в точке x_0, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции в точке x_0.

Задание. Вычислите приращение функции $f(x)$ в произвольной точке, если:

а) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$; б) $f(x) = sin\, 2x$.

№ шага	План вычисления приращения функции	Применение плана	
		а) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$	б) $f(x) = sin\, 2x$
1	Фиксируем произвольное значение аргумента x_0 и находим значение функции $f(x_0)$	$x = x_0$, $f(x_0) = 2x_0^2 + 3x_0 - 5$	$x = x_0$, $f(x_0) = sin\, 2x_0$
2	Задаем приращение Δx и находим значение функции $f(x_0 + \Delta x)$	$x = x_0 + \Delta x$, $f(x_0 + \Delta x) = 2(x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x) - 5 = 2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x - 5$.	$x = x_0 + \Delta x$, $f(x_0 + \Delta x) = sin\, 2(x_0 + \Delta x)$
3	Находим приращение функции: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$	$\Delta f = 2x_0^2 + 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x - 5 - 2x_0^2 - 3x_0 + 5 = 4x_0\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3\Delta x = \Delta x(4x_0 + 2\Delta x + 3)$	$\Delta f = sin\, 2(x_0 + \Delta x) - sin\, 2x_0 = 2cos(2x_0 + \Delta x)\, sin\, \Delta x$

Примеры1. Вычислите приращение функции $f(x)$ в произвольной точке x_0, если:

1) $f(x) = 3x - 8$; 2) $f(x) = 2 - x^2$; 3) $f(x) = x^3 + 3$; 4) $f(x) = \sqrt{5x}$; 5) $f(x) = \frac{6}{x}$;

6) $f(x) = 7^x$; 7) $f(x) = sin\frac{x}{2}$; 8) $f(x) = 1 - cos\, x$; 9) $f(x) = tg 3x$

2. Производная функции.

Определение. Производной функции $y = f(x)$ в заданной точке x называется предел отношения приращения функции Δy в этой точке к приращению аргумента Δx, когда Δx стремится к нулю, т.е.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Задание. Вычислите производную функции $f(x)$ в точке $x_0=2$, если:

а) $f(x)=3x^2-5x+1$; б) $f(x)=\sqrt{7x-5}$.

№ шага	План вычисления производной функции	Применение плана	
		а) $f(x)=3x^2-5x+1$	б) $f(x)=\sqrt{7x-5}$
1	Фиксируем точку x и даем аргументу приращение Δx	$x,\ x+\Delta x$	$x,\ x+\Delta x$
2	Вычисляем приращение функции $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)$	$\Delta f=\left(3(x+\Delta x)^2-5(x+\Delta x)+1\right)-\left(3x^2-5x+1\right)=6x\Delta x+3(\Delta x)^2-5\Delta x$	$\Delta f=\sqrt{7(x+\Delta x)-5}-\sqrt{7x-5}=\sqrt{7x+7\Delta x-5}-\sqrt{7x-5}$
3	Находим отношение приращения функции к приращению аргумента: $\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$	$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta x(6x+3\Delta x-5)}{\Delta x}==6x+3\Delta x-5$	$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\sqrt{7x+7\Delta x-5}-\sqrt{7x-5}}{\Delta x}$
4	Вычисляем производную $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$	$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}(6x+3\Delta x-5)=6x-5$	$f'(x)==\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{7x+7\Delta x-5}-\sqrt{7x-5}}{\Delta x}==\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7x+7\Delta x-5-7x+5}{\Delta x\left(\sqrt{7x+7\Delta x-5}+\sqrt{7x-5}\right)}==\frac{7}{2\sqrt{7x-5}}$
5	Вычисляем $f'(x_0)$	$f'(2)=6\cdot 2-5=7$	$f'(2)=\frac{7}{2\sqrt{7\cdot 2-5}}=\frac{7}{6}$

Примеры2. Вычислите производные следующих функций:

1) $f(x)=2x+3$ в точке $x=3$; 2) $f(x)=3x^2-2$ в точке $x=0$; 3) $f(x)=5x-x^2$ в точке $x=1$; 4) $f(x)=\frac{1}{x+3}$ в точке $x=-1$; 5) $f(x)=\sin 2x$ в точке $x=\frac{\pi}{4}$; 6) $f(x)=\cos x$ в точке $x=-\frac{\pi}{3}$;

7) $f(x)=\sqrt{3x+1}$ в точке $x=1$; 8) $f(x)=\sqrt{3}x+5$ в точке $x=5$.

Вариант 1.

1. Найдите приращение функции *f* в точке x_0, если $f(x)=2x-3,\ x_0=-2,\ \Delta x=0{,}1$.

2. Найдите приращения Δx и Δf в точке x_0, если $f(x)=4x-x^2,\ x_0=2{,}5,\ x=2{,}6$.
3. Найдите производную функции *f* в точке x_0 по определению, если $f(x)=3x^2$ при $x_0 =$ 1.
4. Найдите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $x(t)$, в момент времени t_0, если $x(t)=t^2-2t,\ t_0=3$.

Вариант 2.

1. Найдите приращение функции *f* в точке x_0, если $f(x)=3x-2,\ x_0=1,\ \Delta x=0{,}1$.
2. Найдите приращения Δx и Δf в точке x_0, если $f(x)=x^2-4x,\ x_0=3,\ x=3{,}1$.
3. Найдите производную функции *f* в точке x_0 по определению, если $f(x)=3x^3$ при $x_0 =$ 1.
4. Найдите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $x(t)$, в момент времени t_0, если $x(t)=t^2+2,\ t_0=2{,}5$.

Вариант 3.

1. Найдите приращение функции *f* в точке x_0, если $f(x)=4x+1,\ x_0=2,\ \Delta x=0{,}1$.
2. Найдите приращения Δx и Δf в точке x_0, если $f(x)=x-2x^2,\ x_0=2{,}9,\ x=3$.
3. Найдите производную функции *f* в точке x_0 по определению, если $f(x)=x^2-1$ при $x_0 = 1$.
4. Найдите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $x(t)$, в момент времени t_0, если $x(t)=t^3+2t^2,\ t_0=1$.

Вариант 4.

1. Найдите приращение функции *f* в точке x_0, если $f(x)=4x-3,\ x_0=-1,\ \Delta x=0{,}1$.
2. Найдите приращения Δx и Δf в точке x_0, если $f(x)=2x^2-x,\ x_0=1{,}2,\ x=1{,}4$.
3. Найдите производную функции *f* в точке x_0 по определению, если $f(x)=1+x^3$ при x_0 = 1.
4. Найдите мгновенную скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $x(t)$, в момент времени t_0, если $x(t)=t+t^3,\ t_0=2$.

«Вычисление производных алгебраических функций»

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Решите неравенство: $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\le 0$, если $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x,\ g(x)=2x-1{,}5x^2$.

РЕШЕНИЕ. Пользуясь правилами дифференцирования алгебраических функций и формулами дифференцирования элементарных функций, вычислим производные:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x\right)'=\frac{1}{3}\left(x^3\right)'-3\left(x^2\right)'+5(x)'=x^2-6x+5;$$

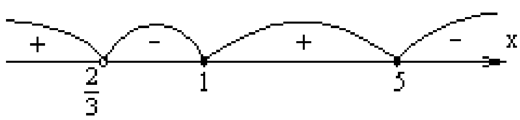
$$g'(x)=\left(2x-1{,}5x^2\right)'=2(x)'-1{,}5\left(x^2\right)'=2-3x.$$

Таким образом, нужно решить неравенство:

$$\frac{x^2-6x+5}{2-3x}\le 0.$$

Разложим числитель дроби на множители

$x^2-6x+5=0,\ x_1=1,\ x_2=5;\quad x^2-6x+5=(x-1)(x-5).$



методом интервалов.

Нули числителя: $x = 1$, $x = 5$. Нуль знаменателя: $x=\frac{2}{3}$.

О т в е т: $\left(\frac{2}{3};1\right]\cup[5;+\infty)$.

ПРИМЕР 2. Тело движется по прямой согласно закону $x(t)=t^3-2t+5$. Найдите скорость и ускорение точки в момент времени $t_0=4$.

РЕШЕНИЕ. Скорость движения – это производная от пути по времени, следовательно,

$$v(t)=x'(t)=\left(t^3-2t+5\right)'=3t^2-2.$$

Значит, в момент времени $t_0=4$ скорость данного движения такова: $v(4)=3\cdot 4^2-2=46$.

Так как нам известна скорость движения как функция времени, мы можем найти ускорение этого движения: $a(t)=v'(t)=\left(3t^2-2\right)'=6t$.

Значит, в момент времени $t_0=4$ ускорение данного движения равно: $a(4)=6\cdot 4=24$.

О т в е т: 46; 24.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.

1. Решите неравенство $f'(x)>0$, если $f(x)=-6x^2+7x-23$.
2. Тело движется по прямой согласно закону $x(t)=3t^2+t+0{,}4$. Найдите скорость и ускорение точки в момент времени $t_0=2$.

<u>Вариант 1.</u>

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

   а) $5x^4-3{,}5x^2+x+6$; б) $\left(\frac{8}{x}+x^2\right)\sqrt{x}$; в) $\frac{1+x}{4-x^2}$.

2. Решите уравнение $f'(x)=0$, если $f(x)=\left(4-\sqrt{x}\right)^2$.

   а) $\frac{5}{x}-x^3+\sqrt{x}+3$; б) $\left(x^2-3x-2\right)\sqrt{x}$; в) $\frac{1-x^2}{1-x^3}$.

<u>Вариант 2.</u>

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) $\frac{5}{x} - x^3 + \sqrt{x} + 3$; б) $\left(x^2 - 3x - 2\right)\sqrt{x}$; в) $\frac{1 - x^2}{1 - x^3}$.

2. Решите неравенство $f'(x) > 0$, если $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 5$.

Вариант 3.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

   а) $0{,}7x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 0{,}75x^2 + \frac{1}{10}$; б) $(x + 2)\sin x$; в) $\frac{x^2}{x + 3}$.

2. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

Вариант 4.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

   а) $2x^{10} + 0{,}05x^4 - \frac{1}{7}x + 0{,}3$; б) $\left(4 - x^2\right)\cos x$; в) $\frac{\sin x}{2 - x^3}$.

2. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = -\frac{x^5}{5} + \frac{10x^3}{3} - 9x$.

Вариант 5.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

   а) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 5$; б) $x^2 \cdot 5^x$; в) $\frac{x^3 - 3x}{1 - 2x}$.

2. Решите уравнение $f'(x) = 0$, если $f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x$.

Вариант 6.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

   а) $2^x + \lg x - 3$; б) $\left(2 - \sqrt{x}\right) \cdot tgx$; в) $\frac{2x^2}{3 - x}$.

2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 5t$. Через сколько секунд после начала движения точка остановится?

Вариант 7.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

   а) $\frac{3}{x^3} - \sqrt[5]{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$; б) $x \cdot \lg x$; в) $\frac{x}{4 - x}$.

2. Найдите x, при котором $\frac{f'(x)}{g'(x)} = -3$, если $f(x) = \frac{1 + x}{4 - x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$.

Вариант 8.

1. Пользуясь формулами и правилами дифференцирования, найдите производные функций:

а) $-\frac{1}{3}x^3+4x^2-7x+18$; б) $\sqrt{x}\cdot \ln x$; в) $\frac{e^x}{x}$.

2. По прямой движутся две материальные точки по законам $x_1(t)=4t^2-3$ и $x_2(t)=t^3$. В каком промежутке времени скорость первой точки больше скорости второй

«Вычисление производных сложных функций»

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Заданы функции $f(x)=2+6x^3,\ g(x)=tgx$. Задайте формулой сложную функцию *h*, если: а) $h(x)=g(f(x))$; б) $h(x)=f(g(x))$.

РЕШЕНИЕ. а) Функцию *h* можно представить в виде сложной функции $h(x)=g(f(x))$ таким образом:

$$h(x)=g(f(x))=tg\left(2+6x^3\right).$$

б) Функцию *h* можно представить в виде сложной функции $h(x)=f(g(x))$ таким образом:

$$h(x)=f(g(x))=2+6tg^3x.$$

ПРИМЕР 2. Задайте формулами элементарные функции *f* и *g*, из которых составлена сложная функция $h(x)=g(f(x))$: а) $h(x)=(4x-9)^7$; б) $\sqrt{tgx}$.

РЕШЕНИЕ. а) Функцию *h* можно представить в виде сложной функции $h(x)=g(f(x))$, где $g(y)=y^7,\ y=f(x)=4x-9$.

б) Функцию *h* можно представить в виде сложной функции $h(x)=g(f(x))$, где $g(y)=\sqrt{y},\ y=f(x)=tgx$.

ПРИМЕР 3. Найдите производные сложных функций: а) $h(x)=\sqrt{9-x^2}$; б) $h(x)=sin\left(3-\frac{x}{2}\right)$.

РЕШЕНИЕ. а) Так как $h(x)=g(f(x))$, где $g(y)=\sqrt{y},\ y=f(x)=9-x^2$, то $g'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$ и $y'=f'(x)=-2x$, откуда $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=\frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$.

б) Так как $h(x)=g(f(x))$, где $g(y)=sin\ y,\ y=f(x)=3-\frac{x}{2}$, то $g'(y)=cos\ y$ и $y'=f'(x)=-\frac{1}{2}$, откуда $h'(x)=cos\ y\cdot y'=cos\left(3-\frac{x}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}cos\left(3-\frac{x}{2}\right)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ.

1. Задайте формулами элементарные функции f и g, из которых составлена сложная функция $h(x) = g(f(x))$, если $h(x) = \frac{1}{sin^5 x}$.
2. Найдите производную сложной функции $h(x) = \sqrt{\frac{4}{x^2} - 1}$.

<u>Вариант 1.</u>
Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = \sqrt[4]{1 + x^2}$; б) $f(x) = 5^{2x}$; в) $f(x) = sin\,3x$; г) $f(x) = \frac{ln\,x}{e^x + e^{-x}}$; д) $f(x) = 2tg^3 4x$.

<u>Вариант 2.</u>
Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$; б) $f(x) = e^{-3x}$; в) $f(x) = cos\,5x$; г) $f(x) = (3x+4) \cdot log_5(x + 1 + x^2)$;
д) $f(x) = 4ctg^3 2x$.

<u>Вариант 3.</u>
Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = (3 - x)^4$; б) $f(x) = 2\,log_3 2x$; в) $f(x) = 3tg\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$; г) $f(x) = (x^2 + 4) \cdot e^{-x^2}$;
д) $f(x) = 2\,sin^3 4x$.

<u>Вариант 4.</u>
Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = \sqrt[5]{x + \sqrt{x}}$; б) $f(x) = lg(3x)$; в) $f(x) = 3\,cos\frac{x}{3}$; г) $f(x) = x \cdot 2^{3x + x^2}$;
д) $f(x) = log_3^2(2x+1)$.

<u>Вариант 5.</u>
Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = (3 - 2x^3)^5$; б) $f(x) = 0{,}3^{3x^2 - 7x + 2}$; в) $f(x) = cos(x^2 + 4x + 12)$;
г) $f(x) = (3x + 5x^2 + x^3) \cdot 4^{x^2}$; д) $f(x) = 3\,sin^2 5x$.

<u>Вариант 6.</u>
Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = \frac{1}{(x^2 + 5)^3}$; б) $f(x) = e^{-4x}$; в) $f(x) = tgx^3$; г) $f(x) = \frac{5x}{sin\,6x}$;
д) $f(x) = (ln(2x+1))^6$.

<u>Вариант7.</u>
Вычислите производные сложных функций:

а) $f(x) = x^2 \cdot e^{x^2 + 3x}$; б) $f(x) = tg^2 2x$; в) $f(x) = sin(5 - x)$; г) $f(x) = 2^{5x - x^2}$;
д) $f(x) = (3x^3 + x^7)^5$;

<u>Вариант 8.</u>

а) $f(x)=\sqrt{2x-1}$; б) $f(x)=e^{-x^3}$; в) $f(x)=tg\sqrt{x}$; г) $f(x)=\dfrac{sin\,5x}{x}$;
д) $f(x)=\sqrt[3]{ln(1-x)}$.

«Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции»

ОБУЧАЮЩИЕ ТАБЛИЦЫ

1. Наименьшее и наибольшее значения функции.

Задание. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y=x^4-2x^2-3$ на промежутке $[0;2]$.

№ шага	План нахождения y_{min} и y_{max} на $[a;b]$	Применение плана
1	Находим производную функции	$y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$
2	Находим критические точки функции	$y'=0$, $4x(x^2-1)=0$, $x=0$ или $x^2-1=0$, $x=-1;0;1$ - критические точки функции
3	Выбираем критические точки, лежащие внутри $[a;b]$	$0;1\in[0;2]$
4	Находим значения функции в критических точках (внутри данного отрезка) и на концах отрезка	$y(0)=-3$ $y(1)=1-2-3=-4$ $y(2)=16-8-3=5$
5	Из найденных значений функции выбираем наименьшее и наибольшее	$y_{min}=y(1)=-4$, $y_{max}=y(2)=5$

Примеры. Применяя указанный выше план, найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$, если:

1) $f(x)=2x^2-4x+3$, $[0;4]$; 2) $f(x)=3x^2-x^3$, $[-1;3]$;

3) $f(x)=3x^3-9x^2+2$, $[-1;1]$; 4) $f(x)=\dfrac{4}{3}x^3-4x$, $[0;2]$;

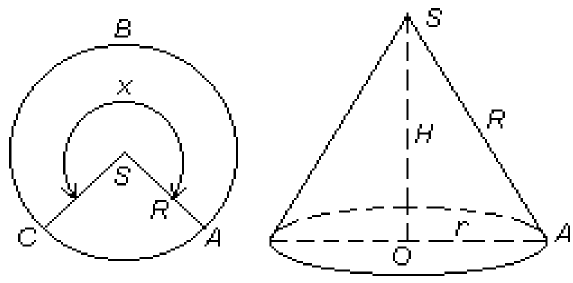
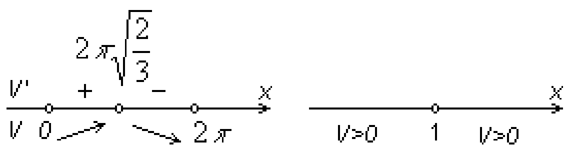
5) $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$, $[-2;2]$;

6) $f(x)=tgx+ctg2x$, $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$; 7) $f(x)=x+cos^2 x$, $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$; 8) $f(x)=2x^2-ln\,x$, $[1;e]$;

9) $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x^2+16}}$, $[-3;3]$.

2. Геометрические задачи на нахождение оптимальных значений величин.

Задание. Из кружка жести радиуса ***R*** вырезается сектор и из оставшейся части круга делается коническая воронка. При какой величине угла вырезаемого сектора объём воронки будет наибольшим?

№ шага	План решения	Применение плана
1	Строим рабочий чертеж	
2	Записываем исходную формулу для вычисления величины, экстремальное значение которой требуется найти	$V_к = \frac{1}{3}\pi r^2 H$
3	Вводим переменную величину x и выражаем через неё значения всех величин исходной формулы	Пусть x – величина центрального угла оставшегося сектора, тогда $\lvert\cup ABC\rvert = Rx$ и $\lvert\cup ABC\rvert = 2\pi r$, значит $2\pi r = Rx$ и $r = \frac{Rx}{2\pi}$. Высота воронки $H = \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$
4	Подставляя найденные значения величин в формулу, представляем её как функцию аргумента x	$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{R^2x^2}{4\pi^2} \cdot \frac{R}{2\pi} \cdot \sqrt{4\pi^2 - x^2}$, $V = \frac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2x^2 - x^6}$
5	Задаем (по смыслу задачи) область определения функции	$0 < x < 2\pi$, $D(V) = (0; 2\pi)$
6	Функцию аргумента x исследуем на экстремум на найденном числовом промежутке	$V'(x) = \frac{R^3x^3(8\pi^2 - 3x^2)}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2x^4 - x^6}}$, $V'(x) = 0$, $8\pi^2 - 3x^2 = 0$, $x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$, $V_{max} = V(2\pi\sqrt{\frac{2}{3}})$ 
7	Записываем ответ	Величина вырезаемого угла равна $2\pi - 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 66^0$

Вариант 1.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[-0,5;0,5]$.
2. Из квадратного листа жести со стороной 12 м надо изготовить бак с квадратным основанием без крышки наибольшего объема. Найдите размеры бака и его объем.

Вариант 2.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[-1;1]$.
2. Какой из прямоугольников с периметром *2p* имеет наибольшую площадь?

Вариант 3.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ на отрезке $[-0,5;0,7]$.
2. Разность двух чисел равна 8. Каковы должны быть эти числа. Чтобы произведение куба первого числа на второе было наименьшим?

Вариант 4.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[0;3]$.
2. Для стоянки машин выделили площадку прямоугольной формы, примыкающую одной стороной к стене здания. Площадку обнесли с трех сторон металлической сеткой длиной 200 м. И площадь ее при этом оказалась наибольшей. Каковы размеры площадки?

Вариант 5.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ на отрезке $[-2;0]$.
2. Из куска картона 32 см $\times$20 см требуется изготовить открытую сверху коробку наибольшей вместимости, вырезая по углам квадраты и затем, загибая выступы для образования боковых сторон коробки. Найдите объем коробки.

Вариант 6.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[-1,5;2]$.
2. Требуется сделать коробку, объем которой должен равняться 108 см^3. Коробка открыта сверху и имеет квадратное дно. Каковы должны быть ее размеры, чтобы на ее изготовление пошло наименьшее количество материала?

Вариант 7.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ на отрезке $[-3;5]$.
2. На странице книги печатный текст должен занимать (вместе с промежутками между строк)

   160 см^2. Ширина полей на странице слева и справа должна быть равна 2 см, а сверху и снизу – 5 см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

Вариант 8.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 3$ на отрезке $[0;4]$.
2. Материальная точка совершает прямолинейное движение по закону $s(t) = 5t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$, где t – время в секундах, s – путь в метрах. В какой момент времени t скорость движения точки будет наибольшей и какова величина этой наибольшей скорости

«Свойства функций

Вариант 1.

1. Найдите $f(5),\ f(-1),\ f\left(\frac{1}{3}\right),\ f(-2{,}1)$, если $f(x) = x^3$.
2. Найдите область определения функции $f(x) = x^2 - x$.
3. Установите, является ли функция $f(x) = x + 1$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x) = x^3 - 4x$ с осью $OУ$ и нули функции.

Вариант 2.

1. Найдите $f(5),\ f(-1),\ f\left(\frac{1}{3}\right),\ f(-2{,}1)$, если $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.
2. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{1}{x-3}$.
3. Установите, является ли функция $f(x) = x^2 - 5$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x) = 1 - x^4$ с осью $OУ$ и нули функции.

Вариант 3.

1. Найдите $f(5),\ f(-1),\ f\left(\frac{1}{3}\right),\ f(-2{,}1)$, если $f(x) = x^3 - 1$.
2. Найдите область определения функции $f(x) = x^2 - 3x + 4$.
3. Установите, является ли функция $f(x) = -x^2$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x) = x^4 - x^2$ с осью $OУ$ и нули функции.

Вариант 4.

1. Найдите $f(5),\ f(-1),\ f\left(\frac{1}{3}\right),\ f(-2{,}1)$, если $f(x) = 3x^2 - 5x - 2$.
2. Найдите область определения функции $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 5x + 4}$.
3. Установите, является ли функция $f(x) = x^3 + x$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.

4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x)=1-x^3$ с осью $OУ$ и нули функции.

Вариант 5.

1. Найдите $f(5),\ f(-1),\ f\left(\frac{1}{3}\right),\ f(-2{,}1)$, если $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$.
2. Найдите область определения функции $f(x)=\frac{5}{x^2-25}$.
3. Установите, является ли функция $f(x)=5x^2+4x$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x)=\frac{1}{x}+2$ с осью $OУ$ и нули функции.

Вариант 6.

1. Найдите $f(5),\ f(-1),\ f\left(\frac{1}{3}\right),\ f(-2{,}1)$, если $f(x)=\frac{3}{x-1}$.
2. Найдите область определения функции $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$.
3. Установите, является ли функция $f(x)=x^3+3$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x)=\frac{2}{x+1}$ с осью $OУ$ и нули функции.

Вариант 7.

1. Найдите $f(5),\ f(-1),\ f\left(\frac{1}{3}\right),\ f(-2{,}1)$, если $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$.
2. Найдите область определения функции $f(x)=\frac{8}{x^2+49}$.
3. Установите, является ли функция $f(x)=\sqrt{1-x}$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x)=3-\frac{1}{x}$ с осью $OУ$ и нули функции.

Вариант 8.

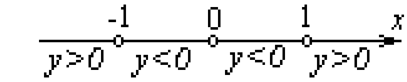
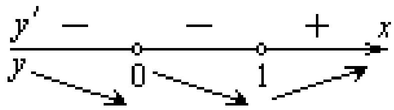
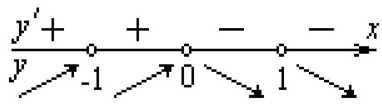
1. Найдите $f(5),\ f(-1),\ f\left(\frac{1}{3}\right),\ f(-2{,}1)$, если $f(x)=\frac{5}{x-1}$.
2. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{x-1}$.
3. Установите, является ли функция $f(x)=\frac{1}{x^2-x}$ четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной.
4. Найдите точки пересечения графика функции $f(x)=\frac{1}{x-3}$ с осью $OУ$ и нули функции.

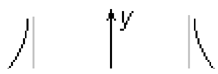
«Исследование функции и построение ее графика»

ОБУЧАЮЩАЯ ТАБЛИЦА

Задание. Исследуйте и постройте графики функции:

а) $f(x)=3x^4-4x^3+1$;   б) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

№ шага	План исследования Функции	Применение плана	
		а) $f(x)=3x^4-4x^3+1$	б) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$
1	Находим область определения функции	$D(f)=R$	$x^2-1=0$, $x=\pm 1$, $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup$ $\cup(1;+\infty)$
2	Исследуем функцию на четность, нечетность	$f(-x)=3x^4+4x^3+1\neq\pm f(x)$ $\Rightarrow$ функция ни четная, ни нечетная	$f(-x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}=f(x)$ $\Rightarrow$ функция четная
3	Находим нули (корни) функции и промежутки её знакопостоянства	$3x^4-4x^3+1=0,\ (3x^4-3x^3)-$ $-(x^3-1)=0$, $(x-1)^2(3x^2+2x+1)=0$, $x-1=0$, $x=1$ - нуль функции	$\dfrac{x^2}{x^2-1}=0$, $x=0$ - нуль функции 
4	Находим производную функции и её критические точки	$f'(x)=(3x^4-4x^3+1)'=12x^3-$ $-12x^2=12x^2(x-1)$, $f'(x)=0\Rightarrow x=0;1$ - критические точки функции	$f'(x)=\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)'=$ $=\dfrac{2x(x^2-1)-2x^3}{(x^2-1)^2}=-\dfrac{2x}{(x^2-1)^2}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=0$ - критическая точка функции
5	Находим промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции	 $y'(-1)<0,\ y'(0{,}5)<0,\ y'(2)>0$ x=0 – не является точкой экстремума, x=1 – точка минимума, $y_{min}=y(1)=0$	 $y'(-2)>0,\ y'(-0{,}5)>0,$ $y'(0{,}5)<0,\ y'(2)<0$, x=0 – точка максимума, $y_{max}=y(0)=0$

6	Находим предел функции при $x \to \pm\infty$	$\lim\limits_{\Delta x \to \pm\infty} \left(3x^4 - 4x^3 + 1\right) = \infty$	$\lim\limits_{\Delta x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2 - 1} = 1$
7	Строим эскиз графика функции		

Примеры. Исследуйте и постройте графики функций:

1) $y = x^2 - 3x + 2$; 2) $y = 2x^2 - x^4 - 1$; 3) $y = 6x - x^2 - 5$; 4) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x^2}$; 5) $y = 3x - x^3$; 6) $y = x^3 - 3x^2 + 4$; 7) $y = x^3 - 3x + 1$; 8) $y = \dfrac{(x-3)^2}{x^2}$; 9) $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

1. Исследуйте функцию $f(x) = \dfrac{x}{2} - x^4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5$ и постройте ее график.

<u>Вариант 2.</u>

1. Исследуйте функцию $f(x) = x^3 - 3x$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = -\dfrac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2$ и постройте ее график.

<u>Вариант 3.</u>

1. Исследуйте функцию $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = 2x^3 - 3x^2$ и постройте ее график.

<u>Вариант 4.</u>

1. Исследуйте функцию $f(x) = 12x - x^3$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{5}x^5$ и постройте ее график.

<u>Вариант 5.</u>

1. Исследуйте функцию $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x) = -x^3 + 3x + 2$ и постройте ее график.

Вариант 6.

1. Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-2x+1$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=x^3-3x$ и постройте ее график.

Вариант 7.

1. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-x^4$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=-x^4+5x^2+4$ и постройте ее график.

Вариант 8.

1. Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^2+5$ на максимум и минимум.
2. Исследуйте с помощью производной функцию $f(x)=x^3-x^2$ и постройте ее график.

Повторение к экзамену: «Производная»

Тест 1. Определение производной.

*1 вар*иант.

1. Приращение функции $f(x)=x^2+2$ в точке $x_0=-1$ при $\Delta x=0{,}1$ равно:
   а) –0,19; б) 0,21; в) 0,20; г) –0,09.

2. Производная функции $y=\dfrac{1}{4}x^4+5$ равна:
   а) $\dfrac{1}{4}x^3$; б) x^3+5; в) x^6; г) x^3.
3. Производная функции $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3+1$ в точке $x=2$ равна:
   а) 5; б) 4,5; в) 6; г) 3,5.
4. Какая из приведенных функций является производной функции $f(x)=-2x^2+1$?
   а) $-2x$; б) $-4x$; в) $-4x+1$; г) $-4x^3$.

*2 вар*иант.

1. Приращение функции $f(x)=2x^2-3$ в точке $x_0=1$ при $\Delta x=-0{,}1$ равно:
   а) 0,42; б) –0,38; в) 0,40; г) –0,39.
2. Производная функции $y=\dfrac{1}{7}x^7-3$ равна:
   а) x^6; б) x^7; в) $\dfrac{1}{7}x^6$; г) x^6-3.
3. Производная функции $f(x)=\dfrac{1}{3}x^4-3$ в точке $x=-2$ равна:
   а) $10\dfrac{2}{3}$; б) $2\dfrac{1}{3}$; в) $-2\dfrac{1}{3}$; г) $-10\dfrac{2}{3}$.
4. Какая из приведенных функций является производной функции $f(x)=3x^3-5$?
   а) x^2; б) $9x^2-5$; в) $9x^2$; г) $9x^4$.

*3 вар*иант.

1. Приращение функции $f(x) = -x^2 + 1$ в точке $x_0 = 1$ при $\Delta x = -0{,}1$ равно:
   а) –0,19; б) 0,21; в) 0,19; г) –0,21.
2. Производная функции $y = \frac{1}{6}x^6 - 4$ равна:
   а) x^7; б) x^5; в) $x^7 - 4$; г) $x^5 - 4$.
3. Производная функции $f(x) = \frac{1}{4}x^6 - 1$ в точке $x = -1$ равна:
   а) –1,5; б) 1,5; в) –0,75; г) 0,75.
4. Какая из приведенных функций является производной функции $f(x) = -4x^4 - 3$?
   а) $-x^3$; б) $-16x^2 - 3$; в) $-16x^5$; г) $-16x^3$.

*4 вар*иант.

1. Приращение функции $f(x) = 3x^2 - 1$ в точке $x_0 = -1$ при $\Delta x = 0{,}1$ равно:
   а) 0,63; б) 0,60; в) –0,59; г) –0,57.
2. Производная функции $y = \frac{1}{5}x^5 + 2$ равна:
   а) $x^6 + 2$; б) $x^4 + 2$; в) x^4; г) x^6.
3. Производная функции $f(x) = \frac{1}{5}x^{10} + 1$ в точке $x = 1$ равна:
   а) 1,2; б) 2; в) –1,2; г) 2,5.
4. Какая из приведенных функций является производной функции $f(x) = -5x^5 + 2$?
   а) $-25x^4$; б) x^4; в) $-25x^4 + 2$; г) $-25x^6$.

Тест 2. Правила нахождения производной. Степенная и тригонометрические функции.

*1 вар*иант.

1. Производная функции $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 8$ равна:
   а) $\frac{1}{5}x^4 - 4x^2$; б) $x^4 - 12x^2$; в) $x^5 - 4x^3$; г) $x^6 - 12x^4 + 8x$.
2. Производная функции $y = x\cos x + x^2 \sin x$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$ равна:
   а) $1 - \pi^2$; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$.
3. Производная функции $y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ в точке $x_0 = -1$ равна:
   а) 0,5; б) 1; в) –0,5; г) –1.

4. Производная функции $y=\sqrt{2}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}x^2$ в точке $x_0=\frac{\pi}{4}$ равна:

а) 0,5; б) –0,5; в) 1; г) 0.

<u>*2 вар*иант.</u>

1. Производная функции $f(x)=\frac{1}{4}x^4-3x^2+5$ равна:

а) $\frac{1}{4}x^3-3x$; б) x^4-3x^2; в) x^3-6x; г) x^5-6x^3+5x.

2. Производная функции $y=x^2\cos x+x\sin x$ в точке $x_0=\pi$ равна:

а) $1-\pi^2$; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$.

3. Производная функции $y=\frac{x^2-1}{x+1}$ в точке $x_0=1$ равна:

а) 0,5; б) 1; в) –0,5; г) –1.

4. Производная функции $y=\sqrt{3}\sin x+\cos\frac{\pi}{3}-\frac{3}{\pi}x^2$ в точке $x_0=\frac{\pi}{6}$ равна:

а) 0,5; б) –0,5; в) 1; г) 0.

<u>*3 вар*иант.</u>

1. Производная функции $f(x)=\frac{1}{7}x^7+2x^4-7$ равна:

а) $\frac{1}{7}x^6+5x^3$; б) x^7+20x^5; в) x^7+5x^4; г) x^6+8x^3.

2. Производная функции $y=x^2\sin x-x\cos x$ в точке $x_0=\pi$ равна:

а) $1-\pi^2$; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$.

3. Производная функции $y=\frac{1-x}{x^2+1}$ в точке $x_0=1$ равна:

а) 0,5; б) 1; в) –0,5; г) –1.

4. Производная функции $y=\sin\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\cos x-\frac{3}{\pi}x^2$ в точке $x_0=\frac{\pi}{3}$ равна:

а) 0,5; б) –0,5; в) 1; г) 0.

<u>*4 вар*иант.</u>

1. Производная функции $f(x)=\frac{1}{6}x^6-5x^4-6$ равна:

а) x^5-20x^3; б) $\frac{1}{6}x^5-5x^3$; в) x^6-5x^3; г) x^7-20x^5-6x.

2. Производная функции $y=x\sin x-x^2\cos x$ в точке $x_0=\pi$ равна:

а) $1-\pi^2$; б) π; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $-\pi$.

3. Производная функции $y=\frac{1+x}{x^2-1}$ в точке $x_0=0$ равна:

а) 0,5; б) 1; в) –0,5; г) –1.

4. Производная функции $y=\sqrt{2}\,sin\,x-\dfrac{2}{\pi}x^2-cos\dfrac{\pi}{6}$ в точке $x_0=\dfrac{\pi}{4}$ равна:

а) 0,5; б) –0,5; в) 0; г) 1.

Тест 3. Правила нахождения производной. Логарифмическая и показательная функции.

1 вариант.

1. Производная функции $y=sin\,2x\cdot e^{2x-1}$ равна нулю в точках:

   а) $\dfrac{\pi}{12}(4k+1)$; б) $\dfrac{\pi}{8}(4k+1)$; в) $\dfrac{\pi}{12}(4k-1)$; г) $\dfrac{\pi}{8}(4k-1)$ $(k\in Z)$.

2. Производная функции $f(x)=x-e^x$ в точке $x=ln\,2{,}5$ равна:

   а) $ln\,2{,}5-1$; б) 3,5; в) –1,5; г) 1.

3. Производная функции $f(x)=3^x-x\,ln\,x\,ln\,3$ в точке $x_0=1$ равна:

   а) $2\,ln\,3$; б) $3\,ln\,2$; в) $-3\,ln\,2$; г) $-2\,ln\,3$.

4. Производная функции $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ в точке $x=ln\,2$ равна:

   а) $1\dfrac{7}{9}$; б) $-1\dfrac{7}{9}$; в) $-\dfrac{16}{25}$; г) $\dfrac{16}{25}$.

2 вариант.

1. Производная функции $y=-cos\,3x\cdot e^{3x+1}$ равна нулю в точках:

   а) $\dfrac{\pi}{12}(4k+1)$; б) $\dfrac{\pi}{8}(4k+1)$; в) $\dfrac{\pi}{12}(4k-1)$; г) $\dfrac{\pi}{8}(4k-1)$ $(k\in Z)$.

2. Производная функции $f(x)=e^{-x}+x$ в точке $x=ln\,3$ равна:

   а) $ln\,3-1$; б) $1\dfrac{1}{3}$; в) 1,5; г) $\dfrac{2}{3}$.

3. Производная функции $f(x)=2^x+x\,ln\,x\,ln\,2$ в точке $x_0=1$ равна:

   а) $2\,ln\,3$; б) $3\,ln\,2$; в) $-3\,ln\,2$; г) $-2\,ln\,3$.

4. Производная функции $f(x)=\dfrac{e^{-x}-e^x}{e^x+e^{-x}}$ в точке $x=ln\,2$ равна:

   а) $1\dfrac{7}{9}$; б) $-1\dfrac{7}{9}$; в) $-\dfrac{16}{25}$; г) $\dfrac{16}{25}$.

3 вариант.

1. Производная функции $y=cos\,2x\cdot e^{2x+1}$ равна нулю в точках:

   а) $\dfrac{\pi}{12}(4k+1)$; б) $\dfrac{\pi}{8}(4k+1)$; в) $\dfrac{\pi}{12}(4k-1)$; г) $\dfrac{\pi}{8}(4k-1)$ $(k\in Z)$.

2. Производная функции $f(x)=e^{-x}-x$ в точке $x=ln\,4$ равна:

   а) –1,25; б) $-ln\,4-1$; в) –0,75; г) 1,5.

3. Производная функции $f(x) = -2^x - x\,ln\,x\,ln\,2$ в точке $x_0 = 1$ равна:

а) $2\,ln\,3$; б) $3\,ln\,2$; в) $-ln\,2$; г) $-3\,ln\,2$.

4. Производная функции $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ в точке $x = ln\,2$ равна:

а) $1\dfrac{7}{9}$; б) $-1\dfrac{7}{9}$; в) $-\dfrac{16}{25}$; г) $\dfrac{16}{25}$.

4 вариант.

1. Производная функции $y = sin\,3x \cdot e^{3x-2}$ равна нулю в точках:

а) $\dfrac{\pi}{12}(4k+1)$; б) $\dfrac{\pi}{8}(4k+1)$; в) $\dfrac{\pi}{12}(4k-1)$; г) $\dfrac{\pi}{8}(4k-1)$ $(k \in Z)$.

2. Производная функции $f(x) = x + e^x$ в точке $x = ln\,2$ равна:

а) $ln\,2 + 1$; б) 3; в) 1; г) 1,5.

3. Производная функции $f(x) = -3^x + x\,ln\,x\,ln\,3$ в точке $x_0 = 1$ равна:

а) $2\,ln\,3$; б) $3\,ln\,2$; в) $-3\,ln\,2$; г) $-2\,ln\,3$.

4. Производная функции $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^{-x} - e^x}$ в точке $x = ln\,2$ равна:

а) $1\dfrac{7}{9}$; б) $-1\dfrac{7}{9}$; в) $-\dfrac{16}{25}$; г) $\dfrac{16}{25}$.

Тест 4. Геометрический смысл производной.

1 вариант.

1. Угловой коэффициент секущей к графику функции $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$, проходящей через точки с абсциссами $x_1 = 0, x_2 = 0{,}5$ равен:

а) 1,25; б) 0,25; в) 1,5; г) 0,625.

2. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x$ в точке с абсциссой $x = 1$ равен:

а) –1; б) $-2\dfrac{2}{3}$; в) 1; г) $\dfrac{1}{3}$.

3. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 2\,cos\,2x - sin\,4x$ в точке с абсциссой $x = \dfrac{\pi}{4}$ равен:

а) 8; б) 2; в) –2; г) 0.

4. Уравнением касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{3x^2 + 2}{x - 1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$ является:

а) $y = 2x - 2$; б) $y = 2x + 2$; в) $y = -2x + 2$; г) $y = -2x - 2$.

*2 вар*иант.

1. Угловой коэффициент секущей к графику функции $f(x) = 2x^2 - 1$, проходящей через точки с абсциссами $x_1 = -0,5, x_2 = 0$ равен:

а) –0,5; б) 0,25; в) –1; г) 0,75.

2. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$ в точке с абсциссой $x = -1$ равен:

а) 3; б) 4; в) 7; г) $\frac{3}{4}$.

3. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 3\,sin\,3x - cos\,2x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{6}$ равен:

а) $\sqrt{3}$; б) 10; в) $9 + \sqrt{3}$; г) 6.

4. Уравнением касательной к графику функции $f(x) = \frac{3 + 2x^2}{x + 1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$ является:

а) $y = -3x + 3$; б) $y = 3x + 3$; в) $y = 3x - 3$; г) $y = -3x - 3$.

*3 вар*иант.

1. Угловой коэффициент секущей к графику функции $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$, проходящей через точки с абсциссами $x_1 = 0,5, x_2 = 1$ равен:

а) 1,25; б) 0,25; в) 1,5; г) –0,75.

2. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{2}x^4$ в точке с абсциссой $x = -1$ равен:

а) 6; б) 4; в) 8; г) –0,75.

3. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = cos\,3x - 2\,sin\,2x$ в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{2}$ равен:

а) 0; б) 7; в) –1; г) 1.

4. Уравнением касательной к графику функции $f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 - 1}$ в точке с абсциссой $x_0 = 0$ является:

а) $y = 2x + 1$; б) $y = -2x - 1$; в) $y = 2x - 1$; г) $y = -2x + 1$.

*4 вар*иант.

1. Угловой коэффициент секущей к графику функции $f(x) = 1 - 2x^2$, проходящей через точки с абсциссами $x_1 = -1, x_2 = -0,5$ равен:

а) 3; б) 0,25; в) 1,5; г) –2.

2. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=3x+\frac{1}{6}x^3$ в точке с абсциссой $x=1$ равен:

а) 4; б) 2,5; в) 1,5; г) 3,5.

3. Угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)=\sin 6x+2\cos 3x$ в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{3}$ равен:

а) 1; б) –1; в) 6; г) 0.

4. Уравнением касательной к графику функции $f(x)=\frac{1-3x}{x^2+1}$ в точке с абсциссой $x_0=0$ является:

а) $y=3x+1$; б) $y=3x-1$; в) $y=-3x+1$; г) $y=-3x-1$.

Тест 5. Физический смысл производной.

1 вариант.

1. Скорость точки, движущейся по прямой по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-5t^2$, равна

   а) $\frac{1}{3}t^2-5t$; б) t^3-5t; в) t^2-10t; г) $\frac{1}{3}t^4-5t^3$

2. Точка движется по прямой по закону $s(t)=2t^2-3t-1$. Её мгновенная скорость $v(3)$ равна:

   а) 8; б) 6; в) 10; г) 9.

3. Ускорение точки, движущейся по прямой по закону $s(t)=t^3-5t^2$ равно:

   а) $2(3t-5)$; б) $9t^2-10$; в) $3t^2-10t$; г) $6t-8$.

4. Тело массой m движется по закону $x(t)=3\cos 3\pi t$. Сила, действующая на тело в момент времени $t=\frac{1}{3}$, равна:

   а) 0; б) $27\pi^2 m$; в) $9\pi^2 m$; г) $9m$.

2 вариант.

1. Скорость точки, движущейся по прямой по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^2-4t$, равна

   а) $\frac{1}{2}t^2-4t$; б) t^2-4t; в) $\frac{1}{2}t^3-4t^2$; г) $t-4$.

2. Точка движется по прямой по закону $s(t)=4t^2-5t+7$. Её мгновенная скорость $v(2)$ равна:

   а) 11; б) 13; в) 12; г) 10.

3. Ускорение точки, движущейся по прямой по закону $s(t)=2t^2-t^3$ равно:

   а) $6-6t$; б) $2(2-3t)$; в) $-3t^2+4t$; г) $-3t+4$.

4. Тело массой m движется по закону $x(t)=-2\sin 2\pi t$. Сила, действующая на тело в момент времени $t=\frac{1}{4}$, равна:

   а) 0; б) $8m$; в) $8\pi^2 m$; г) $4\pi^2 m$.

<u>*3 вар*иант.</u>

1. Скорость точки, движущейся по прямой по закону $x(t)=3t^3+2t^2$, равна

   а) $9t^2+4t$; б) $3t^2+2t$; в) $9t^2+2t$; г) $3t^4+2t^3$.

2. Точка движется по прямой по закону $s(t)=-t^2+10t-7$. Её мгновенная скорость $v(1)$ равна:

   а) 6; б) 8; в) 10; г) 9.

3. Ускорение точки, движущейся по прямой по закону $s(t)=\frac{1}{3}t^3-6t$ равно:

   а) t^2-6; б) $3t-1$; в) $2t$; г) $2t-6$.

4. Тело массой m движется по закону $x(t)=2\sin 4\pi t$. Сила, действующая на тело в момент времени $t=\frac{1}{8}$, равна:

   а) 0; б) $16\pi^2 m$; в) $16m$; г) $-32\pi^2 m$.

<u>*4 вар*иант.</u>

1. Скорость точки, движущейся по прямой по закону $x(t)=2t^3+\frac{1}{4}t^2$, равна

   а) $2t^2+\frac{1}{4}t$; б) $6t^2+0{,}5t$; в) $6t^2+\frac{1}{4}t$; г) $6t^2+0{,}5$.

2. Точка движется по прямой по закону $s(t)=3t^2+2t-1$. Её мгновенная скорость $v(3)$ равна:

   а) 18; б) 16; в) 20; г) 14.

3. Ускорение точки, движущейся по прямой по закону $s(t)=t^2-t$ равно:

   а) $2t-1$; б) $t-1$; в) t^3-t^2; г) 2.

4. Тело массой m движется по закону $x(t)=-3\cos 2\pi t$. Сила, действующая на тело в момент времени $t=\frac{1}{2}$, равна:

   а) $-12\pi^2 m$; б) 0; в) $-12m$; г) $12m$.

Тест 6. Исследование функций.

<u>*1 вар*иант.</u>

1. Областью определения функции $y=\frac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$ является:

   а) $(-3;2)$; б) $(-\infty;-3)$; в) $(2;+\infty)$; г) $[-3;2]$.

2. Область значений функции $y=3\sin x+4\cos x$ является:

а) $[-7;7]$; б) $[1;7]$; в) $[3;4]$; г) $[-5;5]$.

3. Функция $y = 9x + 3x^2 - x^3$ возрастает на промежутке:
   а) $[3;+\infty)$; б) $[-1;3]$; в) $[-1;+\infty)$; г) $(-\infty;-1]$.
4. Критическими (стационарными) точками функции $y = cos\,x + x$ являются:
   а) $\frac{\pi}{2}(4n+1)$; б) $\frac{\pi}{2}(4n-1)$; в) πn; г) $\frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$.

<u>*2 вар*иант.</u>

1. Областью определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{3 + 2x - x^2}}$ является:
   а) $(3;+\infty)$; б) $(-1;3)$; в) $[1;3]$; г) $(-1;+\infty)$.
2. Область значений функции $y = 5\,sin\,x - 12\,cos\,x$ является:
   а) $[-13;13]$; б) $[-17;17]$; в) $[-7;17]$; г) $[5;12]$.
3. Функция $y = x^3 + 1{,}5x^2 - 18x$ убывает на промежутке:
   а) $(-\infty;3]$; б) $[2;+\infty)$; в) $[-3;2]$; г) $[-3;+\infty)$.
4. Критическими (стационарными) точками функции $y = x - sin\,x$ являются:
   а) πn; б) $2\pi n$; в) $\frac{\pi}{2}(4n+1)$; г) $\frac{\pi}{2}(4n-1)$, $n \in Z$.

<u>*3 вар*иант.</u>

1. Областью определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{7x - 10 - x^2}}$ является:
   а) $(5;+\infty)$; б) $(-\infty;2)$; в) $(2;5)$; г) $[2;5]$.
2. Область значений функции $y = 12\,sin\,x + 5\,cos\,x$ является:
   а) $[5;12]$; б) $[-13;13]$; в) $[-17;17]$; г) $[-5;12]$.
3. Функция $y = \frac{1}{3}x^3 - 0{,}5x^2 - 6x$ убывает на промежутке:
   а) $(-\infty;-2]$; б) $(-\infty;3]$; в) $[3;+\infty)$; г) $[-2;3]$.
4. Критическими (стационарными) точками функции $y = sin\,x + x$ являются:
   а) $\frac{\pi}{2}(4n+1)$; б) πn; в) $\pi(2n+1)$; г) $\frac{\pi}{2}(4n-1)$, $n \in Z$.

<u>*4 вар*иант.</u>

1. Областью определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x + 6 - x^2}}$ является:
   а) $(-\infty;-2)$; б) $(3;+\infty)$; в) $[-2;3]$; г) $(-2;3)$.
2. Область значений функции $y = 4\,sin\,x - 3\,cos\,x$ является:
   а) $[-7;7]$; б) $[1;4]$; в) $[-5;5]$; г) $[-4;4]$.
3. Функция $y = 3{,}5x^2 - 10x - \frac{1}{3}x^3$ возрастает на промежутке:
   а) $[2;5]$; б) $(-\infty;2]$; в) $[2;+\infty)$; г) $[5;+\infty)$.

4. Критическими (стационарными) точками функции $y = x - cos\, x$ являются:

   а) πn ; б) $\frac{\pi}{2}n$; в) $\frac{\pi}{2}(4n+1)$; г) $\frac{\pi}{2}(4n-1)$, $n \in Z$.

Тест 7. Наибольшее и наименьшее значения функции.

<u>1 вариант.</u>

1. На отрезке $[-1;3]$ функция $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 5$ достигает наибольшего значения в точке с абсциссой:

   а) –1; б) –2; в) 3; г) 0.

2. Наименьшее значение функции $y = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$ на интервале $(0;1)$ равно:

   а) $-\frac{4}{27}$; б) 2; в) $-\frac{11}{54}$; г) 2.

3. Положительное число, сумма которого со своей обратной величиной имеет наименьшее значение, равно:

   а) 1; б) 2; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{2}$.

4. Стороны прямоугольника наибольшей площади при его периметре 12 м равны:

   а) 2 и 4 м; б) 3 и 3 м; в) 1 и 5 м; г) 1,5 и 4,5 м.

<u>2 вариант.</u>

1. На отрезке $[-1;4]$ функция $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6x$ достигает наименьшего значения в точке с абсциссой:

   а) –1; б) 3; в) 4; г) 0.

2. Наибольшее значение функции $y = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x$ на интервале $(-1;0)$ равно:

   а) $\frac{5}{8}$; б) $\frac{1}{2}$; в) –2; г) $\frac{3}{8}$.

3. Число, куб которого превышает утроенный его квадрат на минимальное значение, равно:

   а) 1; б) 2; в) $\frac{1}{3}$; г) –1.

4. Стороны прямоугольника наименьшего периметра при его площади 114 м^2 равны:

   а) 4 и 36 м; б) 8 и 18 м; в) 12 и 12 м; г) 9 и 16 м.

<u>3 вариант.</u>

1. На отрезке $[-3;1]$ функция $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 5$ достигает наименьшего значения в точке с абсциссой:

   а) –1; б) 0; в) 1; г) –2.

2. Наибольшее значение функции $y = \frac{8}{3}x^3 - x^2 - x$ на интервале $(-1;0)$ равно:

   а) $\frac{7}{48}$; б) 0; в) $-\frac{8}{3}$; г) 2.

3. Число, квадрат которого превышает его куб на максимальное значение, равно:
   а) 1; б) 2; в) $\frac{1}{3}$; г) –1.
4. Стороны прямоугольника наименьшего периметра при его площади 64 м^2 равны:
   а) 2 и 32 м; б) 4 и 16 м; в) 6,4 и 10 м; г) 8 и 8 м.

4 вариант.

1. На отрезке $\left[-3;2\right]$ функция $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x$ достигает наибольшего значения в точке с абсциссой:
   а) –3; б) 2; в) 0; г) –2.
2. Наименьшее значение функции $y=\frac{8}{3}x^3-x^2-x$ на интервале $\left(0;1\right)$ равно:
   а) 0; б) $-\frac{5}{12}$; в) 1; г) $\frac{2}{3}$.
3. Отрицательное число, сумма которого со своей обратной величиной имеет наибольшее значение, равно:
   а) $-\frac{1}{2}$; б) –2; в) $-\frac{1}{3}$; г) –1.
4. Стороны прямоугольника наибольшей площади при его периметре 16 м равны:
   а) 4 и 4 м; б) 2 и 6 м; в) 3 и 5 м; г) 3,5 и 4,5 м

«Вычисление первообразных функций»

.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Выясните, является ли $F\left(x\right)=\frac{2}{9}x^3-3x+cos\,x-1$ первообразной для функции $f\left(x\right)=\frac{2}{3}x^2-3-sin\,x$ на ***R***?

РЕШЕНИЕ. Находим

$$F'\left(x\right)=\left(\frac{2}{9}x^3-3x+cos\,x\right)'=\frac{2}{9}\cdot 3x^2-3\cdot 1+\left(-sin\,x\right)=\frac{2}{3}x^2-3-sin\,x=f\left(x\right).$$

Следовательно, по определению $F\left(x\right)=\frac{2}{9}x^3-3x+cos\,x-1$ является первообразной для функции $f\left(x\right)=\frac{2}{3}x^2-3-sin\,x$ на ***R***.

ПРИМЕР 2. Для функции $f\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{cos^2\,x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$.

РЕШЕНИЕ. По основному свойству первообразных любая первообразная функции $f\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{cos^2\,x}$ записывается в виде $F\left(x\right)=2\cdot 2\sqrt{x}-tgx+C=4\sqrt{x}-tgx+C$.

Координаты точки $M\left(\frac{\pi}{4};1+2\sqrt{\pi}\right)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению:

$$1+2\sqrt{\pi}=4\sqrt{\frac{\pi}{4}}-tg\frac{\pi}{4}+C.$$

Отсюда находим, что

$$1+2\sqrt{\pi}=2\sqrt{\pi}-1+C,$$
$$C=2.$$

Следовательно, уравнение искомой первообразной имеет вид: $F(x)=4\sqrt{x}-tgx+2$.

ТЕСТ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.

Выберите правильный вариант ответа.

1. Функция $F(x)=3x^2+0{,}5\cos 2x+5$ является первообразной для функции: а) $f(x)=6x-\sin 2x$; б) $f(x)=3x^3+0{,}5\cos 2x$; в) $f(x)=9x^3-2\sin 2x$.
2. Дана функция $g(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{2}{\sqrt{x}}$. Первообразная для функции *g(x)*, график которой проходит через точку $\left(\frac{\pi}{4};2\sqrt{\pi}-1\right)$, это:
   а) $G(x)=-4\sqrt{x}-ctgx+4\sqrt{\pi}$; б) $G(x)=ctgx-4\sqrt{x}+2$; в) $G(x)=-ctgx-4\sqrt{x}+2$.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

Вариант 1.

1. Является ли функция $F(x)=x^2+3x+1$ первообразной для функции $f(x)=2x+3$ на ***R***?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{x^2}{3}-\frac{3}{x^2}$.

   б) Для функции $f(x)=\sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через

точку $M\left(\frac{\pi}{4};-2\right)$.

Вариант 2.

1. Является ли функция $F(x)=-\frac{x^4}{4}+5x+2$ первообразной для функции $f(x)=-x^3+5$ на ***R***?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{3}{x^4}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

б) Для функции $f(x)=(4-5x)^3$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(1;\frac{1}{20}\right)$.

Вариант 3.

1. Является ли функция $F(x)=x^2-x$ первообразной для функции $f(x)=2x-1$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\frac{7}{cos^2 x}-3x-x^3$.

   б) Для функции $f(x)=sin\,3x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{12};0\right)$.

Вариант 4.

1. Является ли функция $F(x)=\frac{1}{x^2}-sin\,x$ первообразной для функции $f(x)=-\frac{1}{x^3}-cos\,x$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=x(x+1)(x+2)$.

   б) Для функции $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(0;3)$.

Вариант 5.

1. Является ли функция $F(x)=x^3+1$ первообразной для функции $f(x)=\frac{x^4}{4}+x$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\left(x^{10}-\frac{1}{x^{10}}\right)^2$.

   б) Для функции $f(x)=x-10\,sin\,2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(0;-5)$.

Вариант 6.

1. Является ли функция $F(x)=x+cos\,x$ первообразной для функции $f(x)=1-sin\,x$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=3e^x+5\,cos\,x-7x^4$.

   б) Для функции $f(x)=\frac{1}{(2x-1)^3}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M(1;2)$.

Вариант 7.

1. Является ли функция $F(x)=2x^3+\frac{3}{4}x^4+5$ первообразной для функции $f(x)=3(x+2)x^2$ на $\boldsymbol{R}$?
2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)=\sqrt[7]{x}+7^x+2x^2$.

б) Для функции $f(x) = -6\sin 2x$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $M\left(\frac{\pi}{4};-3\right)$.

Вариант 8.

1. Является ли функция $F(x) = x + \frac{1}{2x^2}$ первообразной для функции $f(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$, $x > 0$?

2. а) Найдите общий вид первообразных для функции $f(x) = 2\sin x + 2^x - \frac{1}{x^3}$.

б) Для функции $f(x) = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку

«Вычисление определенного интеграла»

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

ПРИМЕР 1. Вычислите интеграл $\int_{-2}^{2}\left(-4x + 4 + x^2\right)dx$.

РЕШЕНИЕ. Найдем множество всех первообразных для функции $-4x + 4 + x^2$:

$$F(x) = -4 \cdot \frac{x^2}{2} + 4 \cdot x + \frac{x^3}{3} + C = -2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3} + C.$$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница, получаем:

$$\int_{-2}^{2}\left(-4x + 4 + x^2\right)dx = \left(-2x^2 + 4x + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = \left(-2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + \frac{2^3}{3}\right) - \left(-2 \cdot (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + \frac{(-2)^3}{3}\right) =$$

$$= \left(-8 + 8 + \frac{8}{3}\right) - \left(-8 - 8 - \frac{8}{3}\right) = 21\frac{1}{3}.$$

О т в е т: $21\frac{1}{3}$.

ПРИМЕР 2. Выясните, при каком отрицательном значении переменной *a* верно равенство

$$\int_{-2a}^{a} 2x^3 dx = -7{,}5\ ?$$

РЕШЕНИЕ. Поскольку для $2x^3$ одной из первообразных является $\frac{x^4}{2}$,

$$\int_{-2a}^{a} 2x^3 dx = \left(\frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_{-2a}^{a} = \frac{a^4}{2} - \frac{(-2a)^4}{2} = -\frac{15a^4}{2}.$$

Следовательно, нужно решить уравнение:

$$-\frac{15a^4}{2} = -7{,}5,$$

$$-\frac{15a^4}{2}=-\frac{15}{2},$$

$$a^4=1,$$

$$a=\pm 1.$$

Отрицательный корень этого уравнения – это число –1.

О т в е т: -1.

ТЕСТ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ.

Выберите правильный вариант ответа.

1. Значение $\int_{-1}^{1}\left(-6x+x^2+9\right)dx$ равно:

   а) $18\frac{1}{3}$; б) $18\frac{2}{3}$; в) $19\frac{1}{3}$.

2. Равенство $\int_{a}^{2a}x^3dx=3{,}75$ (где a > 0) верно, если a равно:

   а) 1; б) 2; в) 3.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

<u>Вариант 1.</u>

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{-1}^{2}x^2dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}}\left(1+cos\,2x\right)dx$.
2. Докажите справедливость равенства: $\int_{0}^{1}\left(2x+1\right)dx=\int_{0}^{2}\left(x^3-1\right)dx$.

<u>Вариант 2.</u>

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}-2\,sin\,xdx$; б) $\int_{-2}^{2}\frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$.
2. Докажите справедливость равенства: $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}cos\,xdx=\int_{0}^{\sqrt[3]{3}}x^2dx$.

<u>Вариант 3.</u>

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{cos^2\,x}$; б) $\int_{1}^{2}\frac{dx}{\left(x+1\right)^2}$.

2. Докажите справедливость равенства: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx = \int\limits_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Вариант 4.

1. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^2\left(\frac{2x}{9}\right)}$.

2. Докажите справедливость равенства: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int\limits_0^1 dx$.

Вариант 5.

1. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_{-1}^{2} -x^3 dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{2\pi}{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) dx$

2. Верно ли неравенство: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} < \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x^2}$?

Вариант 6.

1. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} -\frac{dx}{\sin^2 x}$; б) $\int\limits_0^2 (1+3x)^4 dx$.

3. Верно ли неравенство: $\int\limits_{-1}^{1} x^4 dx < \int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$?

Вариант 7.

1. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x dx$; б) $\int\limits_2^7 \frac{dx}{\sqrt{x+2}}$.

2. Верно ли неравенство: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} > \int\limits_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$?

Вариант 8.

1. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_1^5 x^4 dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$.

2. Верно ли неравенство: $\int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx > \int\limits_2^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$?

«Применение интеграла для вычисления площадей и объемов»

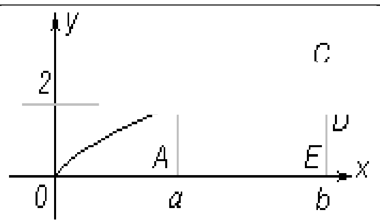
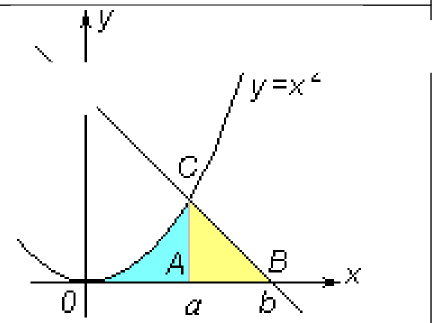
ОБУЧАЮЩАЯ ТАБЛИЦА

Определение. Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей на отрезке $[a;b]$ знака функции $f(x)$, прямыми $x=a,\ x=b$ и отрезком $[a;b]$. Площадь *S* криволинейной трапеции находится по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)\quad (*)$$

Задание. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y=\sqrt{x},\ y=2,\ x=9$; б) $y=x^2,\ y=2-x,\ y=0$.

№ шага	План вычисления площади криволинейной трапеции	Применение плана: а) $y=\sqrt{x},\ y=2,\ x=9$	Применение плана: б) $y=x^2,\ y=2-x,\ y=0$
1	Строим заданные линии и штриховкой отмечаем фигуру, площадь которой надо найти. Установим, является ли эта фигура криволинейной трапецией		
2	Записываем формулу для вычисления площади искомой фигуры	$S=S_{ABCDE}-S_{ABDE}=$ $=\int_a^b \sqrt{x}dx-\int_a^b 2dx$	$S=S_{OAC}+S_{ACB}=$ $=\int_0^a x^2dx+\int_a^b (2-x)dx$
3	Находим пределы интегрирования	$\begin{cases} y=\sqrt{x}, \\ y=2; \end{cases}\Rightarrow \sqrt{x}=2\Rightarrow x=4$, $a=x_A=4,\ b=x_B=9$	$\begin{cases} y=x^2, \\ y=2-x; \end{cases}\Rightarrow$ $\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow x=-2;1$
4	Вычисляем искомую площадь по формуле (*)	$S=\int_4^9 \sqrt{x}dx-\int_4^9 2dx=\left.\frac{2x^{3/2}}{3}\right\|_4^9-$ $-\left.2x\right\|_4^9=\frac{2}{3}(27-8)-2(9-4)=$ $=\frac{8}{3}$, $S=2\frac{2}{3}$ (кв.ед.)	$S=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 (2-x)dx=$ $=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_0^1+\left.\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\right\|_1^2=\frac{1}{3}+$ $+\left(4-\frac{4}{2}\right)-\left(2-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{6}$, $S=\frac{5}{6}$ (кв.ед.)

Примеры. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y = x^2, y = 0, x = 2$; 2) $y = x^2, y = 1$; 3) $y = -x^2 + 1, y = 0$; 4) $y = 1 + x^2, y = 2$;

5) $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$; 6) $y = x^3, y = \sqrt{x}$; 7) $y = 2x - x^2, y = \frac{3}{4}$; 8) $y = x^3, y = 1, x = 2$;

9) $y = \frac{5}{x}, y = 6 - x$.

ВАРИАНТЫ ПРАКТИЧЕСКОЙ РАБОТЫ.

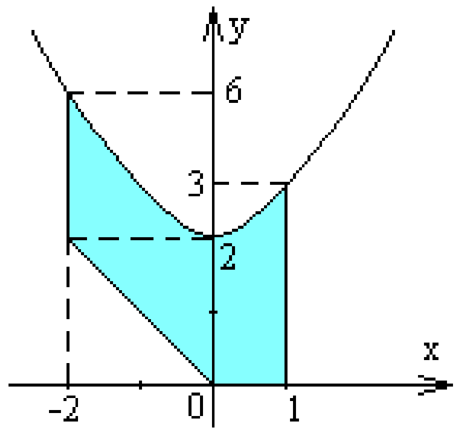
Вариант 1.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 3x + 4, \quad y = x + 1$.
2. *Выберите правильный вариант ответа.*
   Площадь фигуры, изображенной на рисунке, вычисляется по формуле:

   а) $S = \int_{-2}^{2}\left(x^2 - 2\right)dx - 2$;

   б) $S = \int_{-1}^{1}\left(x^2 + 2\right)dx + 2$;

   в) $S = \int_{-2}^{1}\left(x^2 + 2\right)dx - 2$.



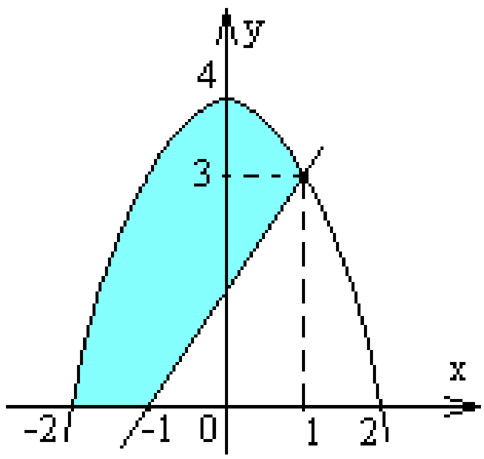
Вариант 2.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 0{,}5x^2 - 2x + 3, \quad y = 7 - x$.
2. *Выберите правильный вариант ответа.*
   Площадь фигуры, изображенной на рисунке, вычисляется по формуле:

   а) $S = \int_{-2}^{1}\left(x^2 + 4\right)dx - 3$;

   б) $S = \int_{-2}^{2}\left(-x^2 + 4\right)dx + 3$;

   в) $S = \int_{-2}^{1}\left(4 - x^2\right)dx - 3$.



Вариант 3.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = (x - 2)^2, \quad y = 4 - x^2$.
2. *Выберите правильный вариант ответа*. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x - 1}, \quad y = 2, \quad y = 0, \quad x = 0$, равна:

а) $4\frac{2}{3}$; б) 4; в) $3\frac{1}{3}$.

Вариант 4.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x + 2, \quad y = 2 + 4x - x^2$.

2. *Выберите правильный вариант ответа*. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x+1}, \; y = 2, \; y = 0, \; x = -2$, равна:

   а) $4\frac{1}{3}$; б) $3\frac{2}{3}$; в) $4\frac{2}{3}$.

Вариант 5.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x + 4, \quad y = 3, \quad x = -1$.
2. *Выберите правильный вариант ответа*. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^{2x}, \; y = 0, \; x = 0, \; x = a \; (a > 0)$, равна $\frac{e-1}{2}$, если, a равно:

   а) $\frac{e}{2}$; б) 0,5; в) $\frac{1}{2e}$.

Вариант 6.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 4x - x^2, \quad y = 4 - x$.
2. *Выберите правильный вариант ответа*. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2e^{0,5x}, \; y = 0, \; x = 0, \; x = b \; (b > 0)$, равна $4e^2 - 4$, если b равно:

   а) $2e$; б) 4; в) $\frac{4}{e}$.

Вариант 7.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 6 + x - x^2, \quad y = 6 - 2x$.
2. *Выберите правильный вариант ответа*. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - |x|, \; y = x^2$, равна:

   а) $2\frac{5}{6}$; б) $1\frac{2}{3}$; в) $2\frac{1}{3}$.

Вариант 8.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 4x + 6, \quad y = 1, \quad x = 1, \; x = 3$.
2. *Выберите правильный вариант ответа*. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - |x|, \; y = 2 - x^2$, равна:

   а) $\frac{3}{4}$*;* *б)* $\frac{1}{3}$*;* *в)* $\frac{1}{6}$*.*

Решение рациональных уравнений, неравенств и их систем.

При решении целых рациональных неравенств используется метод интервалов, который состоит в следующем.

(Неравенство одного из видов $P_n(x)>0$, $P_n(x)<0$, $P_n(x)\ge 0$, $P_n(x)\le 0$, где $P_n(x)$ - многочлен степени *n*:

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n, a_0\neq 0$$

- старший коэффициент, называется целым рациональным неравенством).

1. Находят действительные корни многочлена $P_n(x): x_1, x_2, \ldots, x_k\ (k\le n)$.

2. Корни $x_1, x_2, \ldots, x_k$ отмечают на числовой оси. Точки разбивают числовую прямую на промежутки.

3. Определяют и отмечают на числовой оси знак многочлена $P_n(x)$ внутри каждого из полученных промежутков.

4. Для ответа выбрать промежутки в зависимости от знака неравенства.

Дробно-рациональными неравенствами называются неравенства вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\otimes 0 (\otimes - >, \ge, <, \le)$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены степеней m и n соответственно ($m\neq 0$).

Дробно-рациональные неравенства решаются переходом к равносильным целым рациональным неравенствам (возможно, с дополнительными ограничениями) по следующим правилам:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0\Leftrightarrow P_n(x)Q_m(x)>0;$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}<0\Leftrightarrow P_n(x)Q_m(x)<0;$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\ge 0\Leftrightarrow \begin{cases} P_n(x)Q_m(x)\ge 0, \\ Q_m(x)\neq 0; \end{cases}$$

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_n(x)Q_m(x) \le 0, \\ Q_m(x) \ne 0. \end{cases}$$

Практические задания для аудиторной работы

1. Решите уравнения.

а) $\frac{3x^2-14x}{x-4}=\frac{8}{4-x}$; б) $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x}=\frac{8}{x^3-4x}$; в) $48-14x^{-1}+x^{-2}=0$.

2. Решите неравенства.

а) $x^2-6x+8<0$; б) $\frac{3x-2}{2x-3}>3$.

3. Решить системы уравнений и неравенств.

а) $\begin{cases} x^2-y^2=9, \\ xy=20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{10}{3}, \\ x-y=6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2+5x+10>0, \\ x^2 \ge 16. \end{cases}$

Практические задания для самостоятельной работы

1. Решите уравнения.

2. Решите неравенства.

3. Решить системы уравнений и неравенств.

Вариант 1

1. а) $\frac{x^2+4x}{x+2}=\frac{2x+3}{3}$; б) $\frac{2}{x^2-3x}-\frac{1}{x-3}=\frac{5}{x^3-9x}$;
в) $3(2x+1)^2+10(2x+1)+3=0$.

2. а) $8-2x \ge x^2$; б) $\frac{x+3}{x-2}<1$.

3. а) $\begin{cases} xy=2 \\ 9x^2+y^2=13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{17}{4}, \\ x+y=10; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2+5x+10>0, \\ x^2 \geq 16. \end{cases}$

Вариант 2

1. а) $\frac{5x-3}{x-3}=\frac{2x-3}{x}$; б) $\frac{7}{x+1}-\frac{x+4}{2-2x}=\frac{3x^2-38}{x^2-1}$; в) $(3x-4)^2-5(3x-4)+6=0$.

2. а) $-x^2-10 \leq 7x$; б) $\frac{2x+5}{x-7} \leq 0$.

3. а) $\begin{cases} x^2+y^2=20, \\ xy=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (x+y)^2-(x-y)-8=0, \\ (x+y)^2+(x-y)-10=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x^2+5x+10>0, \\ x^2 \geq 16. \end{cases}$

Вариант 3

1. а) $\frac{x^2-5}{x-1}=\frac{7x+10}{9}$; б) $\frac{2x-5}{x^2-3x}-\frac{x+2}{x^2+3x}+\frac{x-5}{x^2-9}=0$;
в) $(5x+1)^2-3(5x+1)-4=0$.

2. а) $8-2x \geq x^2$; б) $\frac{x+11}{3x-7}>0$.

3. а) $\begin{cases} 2x^2-y^2=34, \\ xy=20; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y+(x-2y)^2=3, \\ x^2-4xy+4y^2=9-3(2x+y); \end{cases}$

Вариант 4

1. а) $\frac{2x+3}{x+2}=\frac{3x+2}{x}$; б) $\frac{8x+4}{x^3+1}+\frac{4}{x+1}=\frac{5x-1}{x^2-x+1}$; в) $2(7x-6)^2+3(7x-6)+1=0$
.

2. а) $8-2x \geq x^2$; б) $\frac{5x-7}{x-5}<7$.

3. а) $\begin{cases} 5\cdot\dfrac{x}{y}+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2=14, \\ 5x+3y=13; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-6xy+9y^2=x-y, \\ x-3y=-1; \end{cases}$

Требования к отчёту:

1. После выполнения работы студент обязан продемонстрировать преподавателю выполненные задания 1-3.

2. Предоставить отчёт о выполненной работе, содержащей:

- порядковый номер и наименование практической работы;

- цель практической работы;

- ход выполнения работы;

- ответы на контрольные вопросы;

- вывод о выполненном задании.

Контрольные вопросы

1. Какие уравнения называются рациональными?

2. В чем заключается метод интервалов для решения целых рациональных неравенств?

3. Какие существуют правила при решении дробно-рациональных неравенств?

Сделайте вывод о том, какие математические навыки вы приобрели на этом занятии.

Логарифмические уравнения и неравенства.

Цель: Закрепить навыки решения логарифмических уравнений и неравенств.
Перед выполнением практической работы необходимо повторить основные методы решения логарифмических уравнений и неравенств.

Учебный элемент № 1

Цель: закрепить решение простейших логарифмических уравнений вида $\log_a x$ =в (где $a>0$, $a\neq1$).

Рекомендации к выполнению:

Вспомните определение логарифма.

Повторите схему решения логарифмических уравнений вида $\log_a x = в$

Логарифмическая функция возрастает (или убывает) на промежутке (0; +∞) и принимает на этом промежутке все действительные значения. По теореме о корне для любого ***в*** данное уравнение имеет единственное решение. Из определения логарифма следует, что $a^в$ является таким решением.

Пример: решите уравнение $\log_2(4x+3)=3$

Решение: $\log_2(4x+3)=3$

$4x + 3 = 2^3$

$4x = 8-3$

$4x = 5$

$x = 1\frac{1}{4}$ Ответ: $1\frac{1}{4}$

Выполните письменную самостоятельную работу (15 мин)

I вариант

II вариант

1. $\log_3 x=2$ (1 б)

1 . $\log_2 x=3$ (1 б)

2. $\log_5 x=-2$ (1б)

2. $\log_4 x$ = -2 (1 б)

3. $\log_2(x-4)=3$ (1 б)

3. $\log_5(13-x)=2$ (1 б)

4. $\log_8 ¿ x^2$ -1) = 1 (1 б)

4. $\log_2 ¿ x^2$ -1) = 3 (2 б)

5.Lg(2 -5x)= 1 (2 б)

5. Lg(7-x) = -1 (2б)

Учебный элемент № 2

Цель: закрепить умения решать логарифмические уравнения методом введения новой переменной.

Рекомендации к выполнению:

Внимательно разберите решение примера и выполните задания самостоятельной работы.

Пример. Решите уравнение $\log_2 x$ - $\log_2 x-2$ =0

- Решение: Введем новую переменную t, t= $\log_2 x$, тогда уравнение примет вид $t^2 - t - 2 = 0$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1\,(-2) = 9$

$t_1 = \frac{1+3}{2} = 2$; $t_2 = \frac{1-3}{2} = -1$

Если t = 1 тогда: $\log_2 x$ = -1, $x = 2^{-1}$, $x = \frac{1}{2}$

Если t =2, тогда: $\log_2 x$ = 2, $x = 2^2$, x =4 Ответ: $\frac{1}{2}$; 4

Выполните письменную самостоятельную работу (10 мин)

Iвариант

IIвариант

1. $\log_3 x-3\log_3 x+2=0$ (2 б)

1.$\log_3 x-3\log_3 x+2=0$ (2 б)

$x-¿$

2. $\log_2 ¿$. $\log_2 x$ = 2 (2 б)

$\log \frac{2}{\frac{1}{3}} x$

2. - $\log_3 x=6$ (2б)

Учебный элемент № 3

Цель: закрепить навыки решения логарифмических уравнений вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Рекомендации к выполнению:

Помните, что решение таких уравнений основано на том, что такое уравнение равносильно уравнению f(x) =g(x) при дополнительных условиях f(x) > 0 ,g(x) > 0.
Можно при решении таких уравнений использовать следующую схему:
$\log_a f(x)=\log_a g(x)$

f(x) =g(x) f(x) = g (x)
f(x) > 0 или g(x) > 0
Внимательно разберите данные ниже решения и выполните задания самостоятельной работы.

x
$¿$
$¿$
$¿$

Пример: Решите уравнения. $\log_2 ¿$ -3x + 1) = $\log_2(2x-3)$
x^2- 3x +1 = 2x -3,
2x – 3 >0;

Решим уравнение x^2 -3x + 1 = 2x – 3
x^2 – 3x + 1 – 2x + 3 = 0
x^2 - 5x +4 = 0
D= 25 -16 = 9
$x_1 = \frac{5+3}{2} = 4$, $x_2 = \frac{5-3}{2} = 1$

x = 4 или x = 1
$x > \frac{3}{2}$
x = 4 Ответ : 4.
Пример: Решите уравнение Lg(x^2 +75) – Lg (x -4) =2
Решение: Lg(x^2 +75) –Lg(x-4) = 2
Найдем ОДЗ : x^2 +75 > 0
x-4 > 0

x –любое число
x > 4 ОДЗ: (4; +∞)

Lg(x^2 +75)=2 + Lg (x-4)
Lg (x^2 +75) = Lg 100 +Lg (x-4)
Lg (x^2 +75) = Lg (100x – 400)
x^2 +75 = 100x – 400
x^2 -100x +75 +400 =0

x^2 -100x +475 = 0

D = 100^2 – 4 1 475 = 100 000 – 1900 = 8100

$x_1 = \frac{100+90}{2}$ =95

$x_2 = \frac{100-90}{2}$ = 5 95 и 5 входят в ОДЗ

Ответ: 95; 5.

Выполните самостоятельную работу (20 мин).

Iвариант

IIвариант

1. $\log_3(3x-5)=\log_3(x-3)$ (2 б)

1. $\log_3(2x-7)=3\log(3x-1)$ (2 б)

2. Lg(x^2-17)=Lg (x+3) (3 б)

2. $\log_2 ¿ (x-1)=\log_2 ¿ (¿¿-x-16)(3б)$ x^2

3. $\log_3(x+5)+\log_3(x+1)=\log_3 5$ (4 б)

3. Lg(x+1) +Lg(x-1)=Lg3^2 (4б)

УЧЕБНЫЙ ЭЛЕМЕНТ № 4

Цель: закрепить умения решать простейшие логарифмические неравенства.

Рекомендации к выполнению:

Решение логарифмических неравенств основано на том, что функция y = $\log_a x$ при a>1 является монотонно возрастающей на своей области определения, а при 0<a<1монотонно убывающей на своей области определения.

При переходе от простейшего неравенства к равносильным системам неравенств, не содержащих знака логарифма следует учитывать область допустимых значений исходного неравенства.

При решении логарифмических неравенств пользуйтесь следующей схемой:

$\log_a f(x)>\log_a g$ (x)

a > 1 0 < a < 1

f(x) > g(x) f(x) < g(x)

g(x) > 0 f(x) > 0

$\log_a f(x)<\log_a g(x)$

a. 1 0 < a < 1

f(x) < g(x) f(x) > g(x)

f(x) > 0 g(x) > 0

Пример: $\log_3(2x-5) < 2$

Решение: $\log_3(2x-5)<2$

$\log_3(2x-5)<\log_3 9$

Функция y = $\log_3 t - возрастающая$

2x-5< 9

2x-5 ¿ 0;

2x <14

2x >5;

x <7

x>2,5 x » (2,5; 7)

Ответ: x » (2,5; 7)

Выполните письменную самостоятельную работу (15 мин)

Iвариант

IIвариант

1. $\log_5(3-8x)>0$ (1 б)

1 . $\log_3(2+x)>0$ (1б)

2 . $\log_3(x-8)\leq$ 1 (1 б)

2 . $\log_2(3x-2)\leq 1$ (1 б)

3 . $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)>-2$ (1 б)

3 . $\log_{\frac{1}{3}}(x+2)>-2$ (1 б)

4. Lg $(x^2+2x+2)<1$ (2 б)

4. Lg$(x^2+x+4)<1$ (2 б)

Учебный элемент № 5

Цель: закрепить умение решать логарифмические неравенства с использованием свойств логарифмов.

Рекомендации к выполнению:

Внимательно рассмотрите решение примеров и выполните задания самостоятельной работы.

Пример: Найдите наибольшее целое решение неравенства:

$(2x+1)-\log_3 5<¿$

$\log_3 ¿$ 0

Решение:

$(2x+1)-\log_3 5<¿$

$\log_3 ¿$ 0

$\log_3(2x+1)<\log_3 5$

Так как основания логарифмов одинаковы и больше 1, то последнее неравенство равносильно системе неравенств:

2x+1 ¿ 0,

2x +1 ¿5;

2x ¿ - 1,
2x ¿ 4;

x $¿-\frac{1}{2}$,

x ¿2 . x (- $\frac{1}{2}$; 2)
Т.к. число 2 данному промежутку не принадлежит, то наибольшее целое значение x равно 1. Ответ: 1.

Выполните письменную самостоятельную работу (15 мин.)

I вариант
II вариант

1.Найдите наибольшее целое решение неравенства:
$\log_2(3-2x)-\log_2 13<¿$ 0 (2б)

1. Найдите наибольшее целое решение неравенства:
$\log_{\frac{1}{3}}(3x+1)$ - $\log_{\frac{1}{3}} 6>¿$ 0 (2б)

2. Найдите наименьшее целое решение неравенства:
$(x+1)<¿$
$(2x-1)-¿\log_2 ¿$
$\log_2 ¿$ 0 (3б)

2.Найдите наименьшее целое решение неравенства:
$(3x+1)-¿\log_5(x-2)>¿$
$\log_5 ¿$ 0 (3б)

Если вы набрали при выполнении учебных элементов №1-5
от 15 баллов до 20 – оценка «3»
от 21 баллов до26 - оценка «4»
от 27 баллов до 29 - оценка «5»
не менее 15 оценка «2

«Решение показательных уравнений и неравенств»

Определение. **Уравнения вида:** $af(x)=ag(x)$**, где** $a>0$**,** $a\neq1$ **называются показательными уравнениями.**
Теорема. **Показательное уравнение** $af(x)=ag(x)$**, где** $a>0$**,** $a\neq1$ **равносильно уравнению** $f(x)=g(x)$**.**
Пример.
Решить уравнения:
$33x-3=27$.
Решение.
Мы хорошо знаем, что $27=3^3$.
Перепишем наше уравнение: $33x-3=3^3$.
Воспользовавшись теоремой выше, получаем, что наше уравнение сводится к уравнению 3x−3=3, решив это уравнение, получим x=2.

Ответ: x=2.

Пример.

Решить уравнение: (0,25)x−0,54√=16∗(0,0625)x+1.

Решение:

Последовательно выполним ряд действий и приведем обе части нашего уравнения к одинаковым основаниям.

Выполним ряд операций в левой части:

1) (0,25)x−0,5=(14)x−0,5.

2) 4√=412.

3) (0,25)x−0,54√=(14)x−0,5412=14x−0,5+0,5=14x=(14)x.

Перейдем к правой части:

4) 16=42.

5) (0,0625)x+1=116x+1=142x+2.

6) 16∗(0,0625)x+1=4242x+2=42−2x−2=4−2x=142x=(14)2x.

Исходное уравнение равносильно уравнению:

(14)x=(14)2x.

x=2x.

x=0.

Ответ: x=0.

Решение показательных уравнений и неравенств Задание:

Вариант 1.

1. Постройте в одной координатной плоскости графики функций .
2. Решите уравнение: а) ; б) ; в) .
3. Решите неравенство: а) ; б) .

Вариант 2.

1. Постройте в одной координатной плоскости графики функций .
2. Решите уравнение: а) ; б) ; в) .
3. Решите неравенство: а) ; б) .

Требования к результатам работы обучающихся:

Оформить отчет в рабочей тетради, сдать преподавателю на проверку.

Отчет должен содержать:

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Задание.
4. Результаты выполнения задания.
5. Вывод по работе.

Критерии оценивания:

Для получения **отличной оценки** учащийся должен:

1. Соблюдать алгоритм выполнения задания
2. Соблюдать отведенное временя

3. Аккуратно выполнить практическую часть
4. Работа выполнены правильно и в полном объеме
5. Отчет выполнен в соответствии с требованиями к выполнению работы.

«Решение систем линейных уравнений»

Методические указания и теоретические сведения к практической работе

1. Системы линейных уравнений

(общие сведения)

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ ------------------ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

Решением системы (1) называется совокупность чисел (k_1, k_2, …, k_n), которая при подстановке в систему (1) вместо неизвестных обращает каждое уравнение системы в тождество. Система может иметь решение, тогда она называется *совместной*, причем, если решение единственное, *система определенная*, если решений множество – *система неопределенная*. Если система не имеет решений, она называется *несовместной*. Рассмотрим два способа решения системы: метод Крамера и метод Гаусса

2. Метод Крамера

При решении методом Крамера используем определители n -го порядка. Пусть задана система (1). Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ -- & -- & -- & -- \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

ТЕОРЕМА. Если определитель системы $\Delta \neq 0$, то систему (3) можно решить по формуле Крамера, причем это решение единственное:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta};\ \ldots;\ x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta},$$

где определитель Δx_i может быть получен из главного определителя путем замены i -го столбца на столбец из свободных членов.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$$

Пример 1.

Составляем главный определитель, элементами которого являются коэффициенты при неизвестных:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}$$

и три вспомогательных определителя:

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 8 & 7 & -1\end{vmatrix};\quad \Delta x_2=\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & 8 & -1\end{vmatrix};\quad \Delta x_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -5 & 1\\ 2 & 7 & 8\end{vmatrix}.$$

Определитель Δx_1 составлен из определителя Δ путем замены элементов первого столбца свободными членами системы уравнений. В определителях Δx_2 и Δx_3 соответственно второй и третий столбцы заменены свободными членами. Вычислим все четыре определителя.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1\end{vmatrix}=5+12+21+10-21+6=33;$$

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 8 & 7 & -1\end{vmatrix}=20+48+7+40-84+2=33;$$

$$\Delta x_2=\begin{vmatrix}1 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & 8 & -1\end{vmatrix}=-1+24+24-2-24+12=33;$$

$$\Delta x_3=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & -5 & 1\\ 2 & 7 & 8\end{vmatrix}=-40+4+84+40-7-48=33.$$

Неизвестные x_1, x_2, x_3 находим по формулам

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta};\quad x_1=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta};\quad x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta};$$

$$x_1=\frac{33}{33}=1;\quad x_2=\frac{33}{33}=1;\quad x_3=\frac{33}{33}=1.$$

Ответ: $x_1=1$; $x_2=1$; $x_3=1$.

Пример2. Решить систему $\begin{cases}2x_1-x_2-x_3=4\\ 3x_1+4x_2-2x_3=11\\ 3x_1-2x_2+4x_3=11\end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем *A* - матрицу системы и *B* - столбец свободных членов: $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\ 11\\ 11\end{pmatrix}$. Далее вычисляем определители:

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=2(16-4)-(-1)(12+16)-1(-6-12)=60\neq 0;$$

$$|A|_1=\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ 11 & 4 & -2\\ 11 & -2 & 4\end{vmatrix}=4(16-4)-(-1)(44+22)-1(-22-44)=180;$$

$$|A|_2=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 11 & -2\\ 3 & 11 & 4\end{vmatrix}=2(44+22)-4(12+6)-1(33-33)=60;$$

$$|A|_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 11\\ 3 & -2 & 11\end{vmatrix}=2(44+22)-(-1)(33-33)+4(-6-12)=60.$$

По теореме Крамера $x_1=\frac{|A|_1}{|A|}=\frac{180}{60}=3$; $x_2=\frac{|A|_2}{|A|}=\frac{60}{60}=1$; $x_3=\frac{|A|_3}{|A|}=\frac{60}{60}=1$. Ответ: $x_1=3$; $x_2=1$; $x_3=3$.

Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2\cdot 3-1-1=4$, $3\cdot 3+4\cdot 1-2\cdot 1=11$, $3\cdot 3-2\cdot 1+4\cdot 1=11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Условия неопределенности и несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными.

Если определитель системы $\Delta=0$, то система является либо несовместной (когда $\Delta_{x_1}\neq 0$ и $\Delta_{x_2}\neq 0$), либо неопределенной (когда $\Delta_{x_1}=0$ и $\Delta_{x_2}=0$). В последнем случае система сводится к одному уравнению, а другое является следствием этого уравнения.

$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ *Условия несовместности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:*

Условия неопределенности системы двух линейных уравнений с двумя переменными можно записать в виде:

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$$

Если один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то система уравнений (1) не имеет решения (если $\Delta=0$).

Если главный и все вспомогательные определители равны нулю, то система (1) имеет бесконечно много решений.

Если главный определитель отличен от нуля, то система уравнений (1) имеет единственное решение.

3. Метод Гаусса

Эффективным методом решения и исследования систем линейных уравнений является метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса.

Идея метода Гаусса состоит в том, что данная система линейных уравнений преобразуется в равносильную ей систему специального вида, которая легко исследуется и решается.

Пример 3.

$$\begin{cases} 5x+3y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}.$$

В результате элементарных преобразований добиваются того, чтобы в последнем уравнении системы осталось одно неизвестное (z), во втором – 2 неизвестных (y и z) а в первом – 3 неизвестных (x, y, z). За ведущее уравнение берется то, в котором коэффициент при x равен 1. Если такого уравнения нет, то его легко получить, разделив любое из уравнений системы на коэффициент при x.

Ведущим уравнением данной системы будет последнее. Перепишем систему так:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x-3y+2z=9 \\ 5x+3y-z=7 \end{cases} \quad (2)$$

Умножаем первое уравнение на (-2) и складываем со вторым, чтобы избавиться от x во втором уравнении. Результат сложения записываем на месте второго уравнения. Далее первое уравнение умножаем на (-5) и складываем с третьим, чтобы избавиться от x в третьем уравнении. Результат записываем на месте третьего уравнения. Первое уравнение при этом переписываем без изменений. Получим:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -7y-16z=2 \\ -7y-4z=7 \end{cases} \quad (3)$$

Системы уравнений (2) и (3) эквиваленты, т. е. они обе несовместны, или же обе совместны и имеют одни и те же решения.

Умножаем второе уравнение системы (5) на (-1) и складываем с третьим, чтобы избавиться от y в третьем уравнении. Первое уравнение при этом не трогаем. Результат записываем на месте третьего уравнения. Тогда

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ -7y-16z=2 \\ 12z=5 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения $z=\frac{5}{12}$. Подставляем это значение z во втрое уравнение системы и находим y:

$$-7y-16\cdot\frac{5}{12}=2$$

$$y=-\frac{26}{21}.$$

В первое уравнение подставляем значения z и y, получаем

$$x+2\cdot\left(-\frac{26}{11}\right)+3\cdot\frac{5}{12}=1$$

$$x=\frac{187}{84}.$$

Ответ: $x=\frac{187}{84}$; $y=-\frac{26}{21}$; $z=\frac{5}{12}$.

Рекомендуется сделать проверку.

3. Матричный способ

Систему можно решить и матричным способом.

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

(4)

Составим матрицу системы из коэффициентов при неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Из неизвестных x_1, x_2, x_3 и свободных членов составим матрицы – столбцы

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Тогда система (4) в матричной форме примет вид

$$A\cdot X=B.$$

Чтобы найти матрицу X, умножим (5) на A^{-1} слева.

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=A^{-1}\cdot B$$

Пример 4.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Найти обратную матрицу A^{-1}.

РЕШЕНИЕ.

1. Составляем и вычисляем определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=-1+0+4+3-4-0=2.$$

Определитель вычислен по правилу треугольника.

2. Транспонируем матрицу. Получаем

$$A^{T}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

3. Вычисляем алгебраические дополнения

A_{11}; A_{12}; A_{13}; A_{21}; A_{22}; A_{23}; A_{31}; A_{32}; A_{33}.

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}; \quad M_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1-4=-5; \quad A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot(-5)=-5.$$

Вычисляем A_{12}. Вычеркиваем первую строку и второй столбец. Составляем определитель второго порядка из оставшихся элементов.

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}; \quad M_{12}=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2-6=-4.$$

Вычисляем $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-4)=4$.

Аналогично вычисляем все остальные алгебраические дополнения:

$A_{13}=7$; $A_{21}=2$; $A_{22}=-2$; $A_{23}=-2$; $A_{31}=1$; $A_{32}=0$; $A_{33}=-1$.

Составим обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5 & 4 & 7\\ 2 & -2 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-5/2 & 2 & 7/2\\ 1 & -1 & -1\\ 1/2 & 0 & -1/2\end{pmatrix}$$

Сделаем проверку

$$E = A^{-1} \cdot A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 7 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример 5.

Решить систему матричным способом

$$\begin{cases} 5x+3y-z=7 \\ 2x-3y+2z=9 \\ x+2y+3z=1 \end{cases}.$$

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Из неизвестных составим матрицу – столбец:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Из свободных членов составим матрицу – столбец:

$$B = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система запишется в виде

$$A \cdot X = B.$$

Получили матричное уравнение. Умножаем обе части этого уравнения на A^{-1} слева. Получаем:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Находим обратную матрицу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 84; \quad A^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 13 & 11 & -3 \\ 4 & -16 & 12 \\ -7 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$ (матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов; $A^{-1} = \frac{1}{84} \cdot \begin{pmatrix} 13 & 11 & -3 \\ 4 & -16 & 12 \\ -7 & 7 & 21 \end{pmatrix}$ (обратная матрица).

Умножая обратную матрицу на B, получаем матрицу X.

$$X=\frac{1}{84}\cdot\begin{pmatrix}13 & 11 & -3\\ 4 & -16 & 12\\ -7 & & 21\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\ 9\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{84}\cdot\begin{pmatrix}187/84\\ -26/21\\ 5/12\end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем ответ:

$$x=\frac{187}{84};\quad y=-\frac{26}{21};\quad z=\frac{5}{12}.$$

Сравните решение этой системы с решением метода Гаусса.

«Решение систем линейных уравнений»

Цель: сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений

Содержание практической работы

Вариант 1.

Задание 1. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases}5x-2y=7\\ 3x+4y=25\end{cases}$

б) $\begin{cases}3x-4y=18\\ 2x+5y=19\end{cases}$

Задание 2. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases}\dfrac{x+2y}{4}-\dfrac{x-2y}{2}-\dfrac{7-2y}{3}=1-x\\ 3x-2y=8\end{cases}$$

Задание 3. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

а) $\begin{cases}2x-3y=2\\ 4x-6y=3\end{cases}$ $\begin{cases}3x-2y=1\\ 6x-4y=2\end{cases}$

б) $\begin{cases}14x+32y=25\\ 28x+ay=7\end{cases}$

Задание 4.

а) При каком значении ***a*** система не имеет решений?

$$\begin{cases} 7x - 12y = 81 \\ 49x - ay = 567 \end{cases}$$

б) При каком значении ***a*** система имеет бесконечно много решений?

Задание 5. Решить систему уравнений по формулам Крамера, методом Гаусса матричным методом:.

а) $$\begin{cases} 7x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 32 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 14 \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Задание 6. Решить систему уравнений методом Крамера:

а) $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

Задание 7. Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} ax + 2y = a \\ 8x + ay = 2a \end{cases}$$

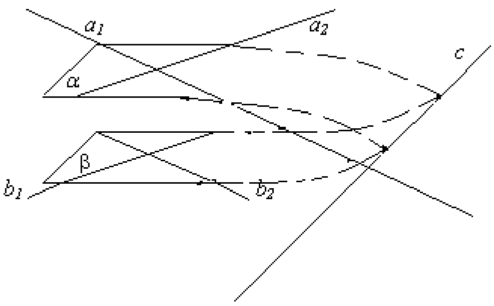
Практические занятия

Параллельность прямых и плоскостей
Теоретические сведения и методические рекомендации

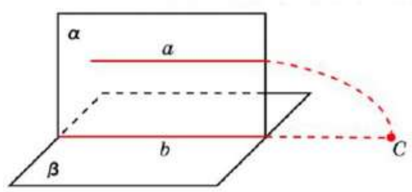
Аксиома 1. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и при том только одну.
Аксиома 2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.
Аксиома 3. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.
Теорема: Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну.
Теорема: В пространстве через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.
Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не пересекаются.

Параллельность плоскостей

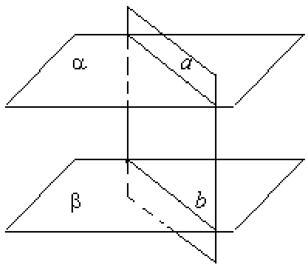
Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются.
Признак параллельности плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



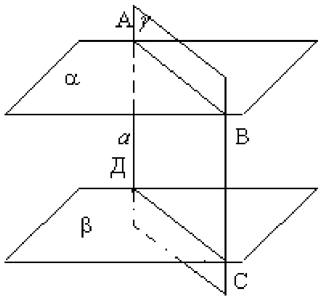
Признак параллельности прямой и плоскости: Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.



Теорема. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.



Теорема. Отрезки параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями, равны.



Основные понятия и аксиомы стереометрии

1 Вариант

1. Ответьте на вопросы:

1. Планиметрия - это раздел геометрии, изучающий …
2. Одна из самых известных древних школ была … .
3.Через любые две точки пространства не….. проходит … .
4.Существует, по крайней мере четыре точки, … .
5.Для прямых и плоскостей в пространстве выполняются все … .
6. Для обозначения плоскости указываются … .
7. Через три точки пространства можно провести … прямых, если … .

2. Сделайте чертеж:

1. Изобразите прямую *a* и точки *A, B* и *C*, не принадлежащие данной прямой. Сделайте необходимые записи.
2. Изобразите плоскость α, точки *E, F*, принадлежащие ей, и точку *G*, ей не принадлежащую. Сделайте необходимые записи.
3. Изобразите прямую *a*, лежащую в плоскости α. Сделайте необходимую запись.
4. Изобразите две пересекающиеся плоскости α и β. Сделайте необходимую запись.

2 Вариант

1.Ответьте на вопросы:

1. Стереометрия - это раздел геометрии, изучающий … .
3. Основными понятиями стереометрии являются … .
4. Через любые три точки пространства, не принадлежащие ……, проходит …
5. Если две плоскости имеют общую точку, то …
6. Для любой плоскости в пространстве существуют точки, ей …
7. Для обозначения прямой указываются …

2. Сделайте чертеж:

1. Изобразите две пересекающиеся в точке *O* прямые *a* и *b* и точки *A, B, C,* причем точка *A* принадлежит прямой *a*, *B* принадлежит прямой *b*, точка *C* не принадлежит данным прямым.
2. Изобразите плоскость α, не принадлежащие ей точки *K, L* и принадлежащую ей точку *M*. Сделайте необходимые записи.
3. Изобразите прямую *b*, пересекающую плоскость α в точке *O*. Сделайте необходимую запись.
4. Изобразите три пересекающиеся по прямой *a* плоскости α, β и ȳ. Сделайте необходимую запись.

Аксиомы стереометрии и следствия из них

1 Вариант

1. Продолжите утверждение:

1) Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то …
2) Через две пересекающиеся прямые проходит …
3) Через различные пары из трех данных точек пространства, не принадлежащих одной прямой, можно провести … прямых.
4) Через различные тройки из четырех данных точек пространства, не принадлежащих одной плоскости, можно провести … плоскостей.
5) Прямые, пересекающие две данные пересекающиеся прямые и не проходящие через их точку пересечения, лежат …

2. ***Из следующих предложений укажите аксиомы, определения, теоремы:***

а) Углы при основании равнобедренного треугольника равны.
б) Через две точки пространства проходит единственная прямая.
в) Вертикальные углы равны.
г) Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

3. Определите взаимное расположение плоскостей α и β если в них лежит треугольник *ABC*. Ответ обоснуйте.

4. Сколько плоскостей может проходить через три точки?

5. Найдите наибольшее число прямых, проходящих через различные пары из четырех точек.

2 Вариант

1. Продолжите утверждение:

1) Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит …
2) Прямая лежит в плоскости, если она имеет, по крайней мере, … точки, принадлежащие данной плоскости.
3) Через три данные точки в пространстве можно провести … плоскостей.
4) Через различные пары из четырех данных точек пространства, не принадлежащих одной плоскости, можно провести … прямых.
5) Прямые, проходящие через данную точку, не принадлежащую данной прямой, и пересекающие ее, лежат …

2. Из следующих предложений укажите аксиомы, определения, теоремы:

а) Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой.

б) Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

в) Для прямых и плоскостей в пространстве выполняются аксиомы планиметрии.

г) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

3. Определите взаимное расположение двух плоскостей α и β, если им принадлежат точки *B* и *C*. Ответ обоснуйте.

4. Найдите наибольшее число прямых, проходящих через различные пары из 5 точек.
5. Найдите наибольшее число плоскостей, проходящих через различные тройки из четырех точек.

Параллельность прямых в пространстве

1 Вариант

1. Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то эта прямая …
2. Две прямые на плоскости называются параллельными, если …
3. Две прямые в пространстве не параллельны, если …
4. Два отрезка называются параллельными, если …
5. В пространстве даны три параллельные между собой прямые, не лежащие в одной плоскости. Тогда через различные пары этих прямых можно провести … плоскостей.
6. Запишите в правильной 4-угольнойой пирамиде *SABCD* все пары параллельных ребер.
7. В плоскости двух параллельных прямых *a* и *b* дана точка *C*, не принадлежащая этим прямым. Через точку *C* проведена прямая *c*. Как может быть расположена прямая *c* относительно прямых *a* и *b*.
8. Через точку, не принадлежащую данной прямой, проведите прямую, параллельную данной.
9. Найдите геометрическое место прямых, пересекающих две данные параллельные прямые.

2 Вариант

1. Если прямая имеет с плоскостью только одну общую точку, то эта прямая …
2. Две прямые в пространстве называются параллельными, если …
3. Две прямые на плоскости не параллельны, если …
4. Через точку в пространстве, не принадлежащую данной прямой, проходит …
5. В пространстве даны четыре попарно параллельные между собой прямые, не лежащие в одной плоскости. Тогда через различные пары этих прямых можно провести … плоскостей.
6. Запишите четыре пары параллельных ребер куба $A \dots D_1$.
7. Даны три прямые *a, b* и *c*. Как могут располагаться эти прямые, чтобы можно было провести плоскость, содержащую все данные прямые.
8. Даны две параллельные прямые *a* и *b*. Докажите, что любая плоскость, пересекающая одну из них, пересечет и другую.
9. Найдите геометрическое место прямых, параллельных данной прямой и пересекающих другую прямую, пересекающуюся с первой.

Скрещивающиеся прямые

1 Вариант

1.Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, если …

2. В тетраэдре имеется … пар скрещивающихся ребер.
3. Через точку, принадлежащую прямой, можно провести … прямых, скрещивающихся с этой прямой.
4. Даны две скрещивающиеся прямые и третья прямая, их пересекающая. Плоскости, проходящие через первую и третью прямые и через вторую и третью прямые ...
5. В кубе $A...D_1$ запишите ребра, скрещивающиеся с ребром AB.
6. Запишите пары скрещивающихся ребер 4-угольной пирамиды $SABCD$.
7. Как расположены относительно друг друга прямые a и b на рисунке 1? Ответ обоснуйте.
8. Даны две скрещивающиеся прямые a и b и не принадлежащая им точка C. Постройте прямую c, проходящую через точку C и пересекающую прямые a и b.

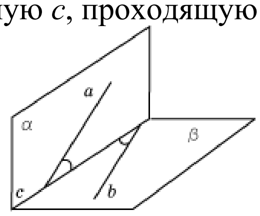


Рис. 1

2 Вариант

1. Две прямые в пространстве скрещиваются, если они не пересекаются и …
2. Две прямые скрещиваются, если одна из них лежит в плоскости, а другая
3. Через точку, не принадлежащую прямой, можно провести … прямых, скрещивающихся с этой прямой.
5. В четырехугольной пирамиде имеется … пар скрещивающихся ребер.
6. Запишите ребра, скрещивающиеся с ребром SA правильной 4-угольной пирамиды $SABCD$.
7. Запишите ребра, скрещивающиеся с диагональю B_1D куба $A…D_1$.
8. Плоскости a и b пересекаются по прямой c (рис. 1). Прямая a лежит в плоскости a и пересекает прямую c. Можно ли в плоскости b провести прямую, параллельную прямой a? Ответ обоснуйте.
9. Существуют ли две параллельные прямые, каждая из которых пересекает две данные скрещивающиеся прямые? Ответ обоснуйте.

Параллельность прямой и плоскости

Цели:

1.Систематизировать знания обучающихся по теме параллельность прямой и плоскости.
2.Отрабатывать точность формулировок определений, теорем.
3. Учиться доказывать параллельность прямой и плоскости с помощью признака .

План работы:

1. Повторение теоретического материала.
2. Письменные ответы на теоретические вопросы.
3. Выполнение чертежей, доказательство параллельности прямой и плоскости с помощью признака, решение задач.

1 Вариант

1. Если прямая не имеет с плоскостью ни одной общей точки, то …
2. Прямая пересекает плоскость, если …
3. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает ее, то …
4. Если три вершины параллелограмма принадлежат некоторой плоскости, то четвертая вершина … этой плоскости.
5. Ребро многогранника параллельно его грани, если оно …

6. Запишите ребра, параллельные плоскости грани CC_1D_1D правильной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.
7. Прямая *a* параллельна плоскости a; прямая *b* пересекает плоскость a в точке *B*; прямая *c*, пересекающая прямые *a* и *b* соответственно в точках *E* и *F*, пересекает плоскость a в точке *C*. Сделайте рисунок. Как могут располагаться относительно друг друга прямые *a* и *b*?
8. Плоскости a и b пересекаются по прямой *c*. Точка *A* принадлежит плоскости a, точка *B* – плоскости b. Постройте: а) прямую *a*, лежащую в плоскости a, проходящую через точку *A* и параллельную плоскости b; б) прямую *b*, лежащую в плоскости b, проходящую через точку *B* и параллельную плоскости a. Как будут располагаться относительно друг друга прямые *a* и *b*?
9. Точки *A* и *B* принадлежат смежным боковым граням пирамиды. Проведите в этих гранях через данные точки два отрезка, параллельные между собой.

2 Вариант

1. Прямая называется параллельной плоскости, если …
2. Прямая лежит в плоскости, если …
3. Доказательство «от противного» заключается в том, что …
4. Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то …
5. Если прямая параллельна прямой, пересекающей данную плоскость, то она …

6. Запишите плоскости граней, параллельных ребру CC_1 параллелепипеда $A…D_1$.

7. Прямая *a* параллельна плоскости a; прямые *b* и *c*, пересекающие прямую *a* соответственно в точках *B* и *C*, пересекают плоскость a соответственно в точках *D* и *E*. Сделайте рисунок. Как могут располагаться относительно друг друга прямые *a* и *b*?

8. Плоскости a и b пересекаются по прямой *c*. Прямая *a* лежит в плоскости a. Докажите, что если: а) *a* пересекает плоскость b в точке *A*, то *A* принадлежит прямой *c*; б) *a* параллельна плоскости b, то она параллельна прямой *c*.

9. Точки *A* и *B* принадлежат смежным боковым граням призмы. Проведите в этих гранях через данные точки два отрезка, параллельные между собой.

Параллельность двух плоскостей

1 Вариант

1.Закончите утверждение:

1. Если две плоскости имеют общую точку, то …
2. Две плоскости не параллельны, если …
3. Если прямая, не лежащая в плоскости, параллельна некоторой прямой, лежащей в этой плоскости, то …
4. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны двум прямым другой плоскости, то эти вторые прямые …
5. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит единственная плоскость
6. Запишите параллельные плоскости параллелепипеда $A…D_1$.

2. Верны ли утверждения:

1.Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит единственная плоскость, параллельная данной.
2. Если две прямые, лежащие в одной плоскости, соответственно параллельны двум прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
3.Существует бесконечно много прямых, параллельных данной плоскости и проходящих через точку, не принадлежащую этой плоскости.

4. Если одна из двух данных плоскостей параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

3. Докажите утверждение:

1. Докажите, что две плоскости, параллельные одной и той же третьей плоскости, параллельны между собой.

2. Отрезки *AB* и *CD* лежат соответственно в параллельных плоскостях a и b (рис. 2). Как могут располагаться относительно друг друга прямые *AC* и *BD*? Могут ли они быть параллельными?

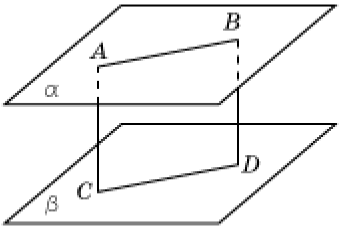


Рис. 2

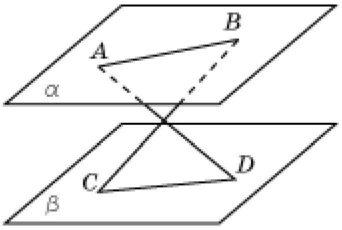


Рис. 3

2 Вариант

1.Закончите утверждение:

1. Две плоскости в пространстве называются параллельными, если …
2. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то …
3. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то …
4. Две грани многогранника параллельны, если они …
5. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проходит … плоскостей, параллельных этой плоскости.
6. В треугольной пирамиде *SABC* проведите плоскость, параллельную ее основанию *ABC*.

2. Верны ли утверждения:

1. Если прямая, лежащая в одной плоскости, параллельна прямой, лежащей в другой плоскости, то эти плоскости параллельны.
2. Если плоскость пересекает две данные плоскости по параллельным прямым, то эти плоскости параллельны.
3. Существует бесконечно много плоскостей, параллельных данной прямой и проходящих через точку, не принадлежащую этой прямой.
4. Если две плоскости параллельны одной и той же прямой, то они параллельны.

3. Докажите утверждение:

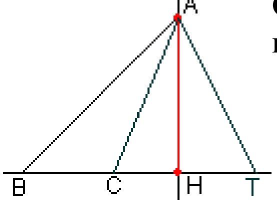
1. Докажите, что если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую.

2. Отрезки *AB* и *CD* лежат соответственно в параллельных плоскостях a и b (рис. 3). Как могут располагаться относительно друг друга прямые *AD* и *BC*?

Перпендикулярность прямых и плоскостей
Теоретические сведения и методические рекомендации

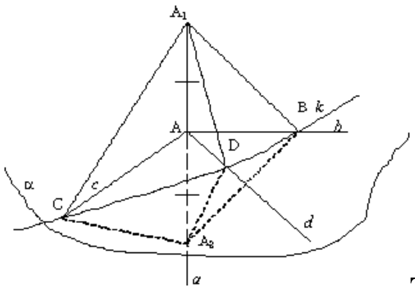
Определение. Перпендикулярными называются прямые, которые пересекаются под прямым углом.

Определение. Перпендикуляром к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной к данной.

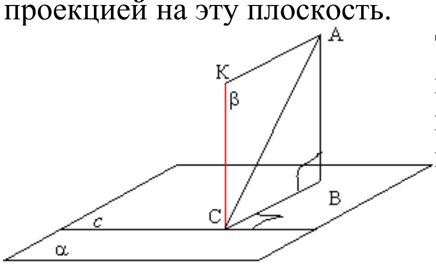


Определение. Наклонной, проведенной из данной точки к данной прямой (плоскости), называется отрезок, соединяющий данную точку с любой точкой прямой(плоскости), не являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из этой же точки на данную прямую(плоскость).

Определение. Прямая называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости.
Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.



Теорема. Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.
Теорема. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
Определение: Угол между прямой и плоскостью есть угол между этой прямой и её проекцией на эту плоскость.



Теорема о трех перпендикулярах. Если прямая, проведенная на плоскости через основание наклонной, перпендикулярна её проекции, то она перпендикулярна и наклонной.

Перпендикуляр и наклонная

1 Вариант

1. Закончите утверждение:

1. Перпендикуляром к плоскости называется …
2. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость, то …
3. Перпендикуляр, проведенный из точки к плоскости … всякой наклонной, проведенной из той же точки к той же плоскости.
4. Равные наклонные, проведенные из одной точки к плоскости, имеют …
5. Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных точек, является …

2. Сделайте чертеж и решите задачи.

1. Дана плоскость α. Из точки A проведены к ней две наклонные AB = 20 см и AC = 15 см. Проекция первой наклонной на эту плоскость равна 16 см. Найдите проекцию второй наклонной.
2. Из точки M, не принадлежащей плоскости α, проведены к ней равные наклонные MA, MB и MC. Докажите, что основания наклонных принадлежат одной окружности. Найдите ее центр.
3. Из точки B проведены к плоскости α две равные по 2 см наклонные. Угол между ними равен 60^0, а между их проекциями – 90^0. Найдите перпендикуляр, опущенный из точки B на плоскость α.

3. Дополнительное задание:

1. Дан треугольник со сторонами 13 см, 14 см и 15 см. Точка *M*, не принадлежащая плоскости этого треугольника, удалена от сторон треугольника на 5 см. Найдите перпендикуляр, опущенный из точки *M* на плоскость данного треугольника.

2 Вариант

1. Закончите утверждение:

1. Наклонной к плоскости называется …
2. Если прямая, лежащая в плоскости, перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то …
3. Ортогональная проекция наклонной … самой наклонной.
4. В правильной пирамиде высота проходит через …
5. Геометрическим местом точек, равноудаленных от трех данных точек, не принадлежащих одной прямой, является …

2. Сделайте чертеж и решите задачи.

1. Из точки *A* проведены к плоскости α наклонная *AB* = 9 см и перпендикуляр *AO* = 6 см. Найдите проекцию этого перпендикуляра на данную наклонную.
2. Найдите геометрическое место точек в пространстве, равноудаленных от всех точек данной окружности.
3. Из данной точки проведены к данной плоскости две равные наклонные, образующие между собой угол 60^0. Угол между их проекциями – прямой. Найдите угол между каждой наклонной и ее проекцией.

Решение задач. Перпендикуляр и наклонная

Цели:

1. Закрепить теоретические знания по теме перпендикуляр и наклонная.
2.Отрабатывать навыки решения задач, применяя теоретический материал.

План работы:

1. Повторение теоретического материала.
2. Выполнение чертежей, нахождение наклонной и перпендикуляра. Решение задач.

I вариант	**II вариант**
1. *Решить задачу*:	
1) Длина наклонной 18 см. Угол между наклонной и плоскостью 30^0. Чему равна длина проекции наклонной на эту плоскость? 2) Из точки лежащей вне плоскости проведены к этой плоскости две наклонные под углом 30^0, равные $2\sqrt{3}$. Их проекции образуют между собой угол 120^0. Определить расстояние между основаниями наклонных. 3) Прямоугольный треугольник *ABC* опирается катетом *AC* на плоскость α, образуя с ней двугранный угол в 60^0. Определить гипотенузу *BC*, если *AC*=*a* и расстояние от вершины *B* до плоскости равно *b*. 4) Катеты прямоугольного треугольника *ABC* равны 12 и 16 дм. Из вершины прямого угла *C* восставлен к плоскости треугольника перпендикуляр *CM*=28 дм. Найти расстояние от точки *M* до гипотенузы.	1) Вычислить длину проекции отрезка 20 см, если угол его наклона 0^0, 30^0, 45^0, 90^0. 2) Вычислить угол, под которым диагональ куба наклонена к его грани. 3) Из центра *O* круга радиуса, равного 3 дм, восставлен перпендикуляр *OB* к его плоскости. *К* окружности проведена касательная в точке *A* и на этой касательной отложен от точки касания отрезок *AC*, равный 2 дм. Найти длину наклонной *BC*, если *OB*=6 дм. 4) Найти отрезок *AB*, заключенный между гранями прямого двугранного угла, если проекции этого отрезка на грани равны 25 и 21 см.

Перпендикулярность прямой и плоскости

1 Вариант

1. Закончите утверждение:

1. Прямая называется перпендикулярной плоскости, если …
2. Признак перпендикулярности прямой и плоскости заключается в том, что …
3. Через любую точку пространства проходит … прямая, перпендикулярная данной плоскости.
4. Высотой пирамиды называется …

2. Сделайте чертеж и решите задачи.

1. Через центр O квадрата $ABCD$ проведена прямая OK, перпендикулярная плоскости этого квадрата. Докажите, что прямая AK перпендикулярна прямой BD.
2. Точка M принадлежит боковой грани ABD треугольной пирамиды $ABCD$, у которой $AB = BD$ и $AC = CD$. Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через точку M и перпендикулярной прямой AD.

2 Вариант

1.Закончите утверждение:

1. Плоскость называется перпендикулярной прямой, если …
2. Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости, то …
3. Перпендикуляром, опущенным из точки на плоскость, называется …
4. Через любую точку пространства проходит … плоскость, перпендикулярная данной прямой.

2. Сделайте чертеж и решите задачи.

1. Через точку M – середину стороны AB равностороннего треугольника ABC проведена прямая MH, перпендикулярная плоскости этого треугольника. Докажите перпендикулярность прямых AB и HC.
2. В прямоугольном параллелепипеде $A…D_1$ постройте сечение, проходящее через точку K, внутреннюю точку диагонального сечения AA_1C_1C, и перпендикулярное прямой BB_1.

Нахождение угла между прямыми в пространстве

1 Вариант

1. В кубе $A…D_1$ найдите угол между прямыми: а) AB и BB_1; б) BD и BB_1; в) AB_1 и CC_1; г) AB_1 и CD_1.
2. В правильной треугольной призме $A…C_1$ отрезок CD перпендикулярен ребру AB. Найдите угол между прямыми: а) CD и AA_1; б) CD и A_1B_1.
3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с равными ребрами найдите угол между диагональю AC основания и боковым ребром SC.
4. Найдите угол между скрещивающимися ребрами правильного тетраэдра.

2 Вариант

1. В кубе $A…D_1$ найдите угол между прямыми: а) BC и BB_1; б) A_1C_1 и AD; в) BB_1 и BD; г) A_1D и BC_1.
2. В правильной треугольной призме $A…C_1$ AM – медиана основания ABC. Найдите угол между прямыми: а) AM и C_1B_1; б) AM и A_1C_1.
3. В правильном тетраэдре $ABCD$ точка M – середина ребра CB. Найдите угол между прямыми AM и DC.
4. Найдите угол между непересекающимися ребрами правильной треугольной пирамиды.

Нахождение угла между прямой и плоскостью

Цели:

1. Сформировать и закрепить теоретические знания по теме угол между прямой и плоскостью.
2. Отрабатывать точность формулировок определений, теорем.
3. Уметь применять теоретические знания при решении задач.
4. Отрабатывать навыки решения задач.

План работы:

1. Повторение теоретического материала.

2. Письменные ответы на теоретические вопросы.
3. Выполнение чертежей, применяя определение угла между прямой и плоскостью решение задач.

1 Вариант

1.Закончите утверждение:

1. Углом между наклонной и плоскостью называется …
2. Равные наклонные, проведенные к плоскости из одной точки, образуют с ней …
3. В кубе $A...D_1$ прямая AA_1 образует с плоскостью ABC угол …
4. В кубе $A...D_1$ прямая A_1D образует с плоскостью DCD_1 угол …
5. В пирамиде боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания. В какую точку проектируется вершина пирамиды?

2. Сделайте чертеж и решите задачи:

1. В кубе $A...D_1$ найдите косинус угла между ребром AA_1 и плоскостью AB_1D_1.
2. К плоскости α проведена наклонная MH (H принадлежит плоскости α). Докажите, что если проекция наклонной MH образует равные углы с прямыми AH и BH, лежащими в плоскости α, то и сама наклонная MH образует с ними равные углы.
3. Проведите к данной плоскости через данную на ней точку прямую, образующую с плоскостью угол 90^0.

2 Вариант

1. Закончите утверждение:

1. Углом между прямой, перпендикулярной плоскости, и этой плоскостью …
2. Угол между наклонной и плоскостью является наименьшим из …
3. Две параллельные наклонные, проведенные к одной и той же плоскости, образуют с ней
4. В кубе $A...D_1$ прямая AB образует с плоскостью BCC_1 угол …
5. В кубе $A...D_1$ прямая BC_1 образует с плоскостью ACD угол …

2. Сделайте чертеж и решите задачи:

1. В кубе $A...D_1$ найдите косинус угла между ребром A_1D_1 и плоскостью AB_1D_1.
2. К плоскости α проведена наклонная BP (P принадлежит плоскости α), которая образует равные углы с прямыми PE и PF, лежащими в плоскости α. Докажите, что углы, образованные прямыми PE и PF с проекцией наклонной BP на плоскость α, равны.
3. Через точку, не принадлежащую данной плоскости, проведите прямую, образующую с плоскостью угол 90^0.

Нахождение двугранного угла

1 Вариант

1.Закончите утверждение:

1. Двугранным углом называется фигура …
2. Гранями двугранного угла называются …
3. Величиной двугранного угла называется …
4. Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется …

2. Сделайте чертеж и решите задачи:

1. Наклонная, проведенная к плоскости, равна a. Найдите ортогональную проекцию этой наклонной на плоскость, если угол между наклонной и плоскостью равен 30^0.
2. На одной грани двугранного угла взяты две точки A и B. Из них опущены перпендикуляры AA_1, BB_1 на другую грань и AA_2, BB_2 на ребро двугранного угла. Найдите BB_2, если $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 3$ см, $AA_2 = 24$ см.
3. Два равных прямоугольника имеют общую сторону и их плоскости образуют угол 45^0. Найдите отношение площадей двух фигур, на которые ортогональная проекция стороны одного прямоугольника разбивает другой.

2 Вариант

1.Закончите утверждение:

1. Ребром двугранного угла называется …
2. Линейным углом двугранного угла называется …

3. Величина двугранного угла не зависит …
4. Углом между двумя пересекающимися плоскостями называется …
2. Сделайте чертеж и решите задачи:
1. Наклонная, проведенная к плоскости, равна a. Найдите ортогональную проекцию этой наклонной на плоскость, если угол между наклонной и плоскостью равен 60^0.
2. На одной грани двугранного угла взяты две точки, отстоящие от его ребра на 9 см и 12 см. Расстояние от первой точки до другой грани двугранного угла равно 20 см. Найдите расстояние от этой грани до второй точки.
3. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а их плоскости образуют угол 60^0. Общее основание равно 16 см, боковая сторона одного треугольника равна 17 см, а боковые стороны другого перпендикулярны. Найдите расстояние между вершинами треугольников, лежащими против общего основания.

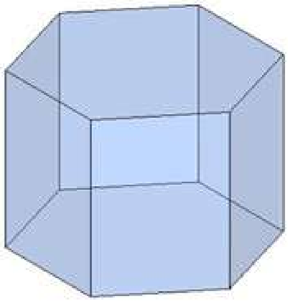
Применение перпендикулярности плоскостей при решении задач

1 Вариант
1. Дан куб $A…D_1$. Докажите перпендикулярность плоскостей: а) ABD и DCC_1; б) AB_1C_1 и ABB_1.
2. Через данную прямую, лежащую в данной плоскости, проведите плоскость, перпендикулярную этой плоскости.
3. Две перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой AB. Прямая CD лежит в плоскости α, параллельна AB и находится на расстоянии 60 см от нее. Точка E принадлежит плоскости α и находится на расстоянии 91 см от AB. Найдите расстояние от точки E до прямой CD.
4. Докажите, что прямая a и плоскость α, перпендикулярные одной и той же плоскости α, параллельны, если прямая a не лежит в плоскости α.
2 Вариант
1. Дан куб $A…D_1$. Докажите перпендикулярность плоскостей: а) AA_1D_1 и $D_1B_1C_1$; б) A_1B_1D и BB_1C_1.
2. Через наклонную к плоскости проведите плоскость, перпендикулярную этой плоскости.
3. Отрезок MN имеет концы на двух перпендикулярных плоскостях и составляет с ними равные углы. Докажите, что точки M и N одинаково удалены от линии пересечения данных плоскостей.
4. Докажите, что две плоскости α и β параллельны, если они перпендикулярны плоскости α и пересекают ее по параллельным прямым.

Многогранники
Теоретические сведения и методические рекомендации

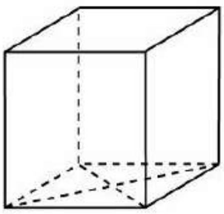
Определение: Призма — многогранник, две грани которого являются равными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани — параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками.
Свойства призмы:
- Основания призмы являются равными многоугольниками.
- Боковые грани призмы являются параллелограммами.
- Боковые ребра призмы параллельны и равны.
- *Объём призмы* равен произведению её высоты на площадь основания:
- Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади её боковой поверхности и удвоенной площади основания.
- Площадь боковой поверхности произвольной призмы S=PL, где P — периметр перпендикулярного сечения, L — длина бокового ребра.

- Площадь боковой поверхности прямой призмы S=PH, где P — периметр основания призмы, H— высота призмы.
- Перпендикулярное сечение перпендикулярно ко всем боковым рёбрам призмы.
- Углы перпендикулярного сечения — это линейные углы двугранных углов при соответствующих боковых рёбрах.
- Перпендикулярное сечение перпендикулярно ко всем боковым граням.
- Призма с боковыми рёбрами, перпендикулярными её основаниям, называется ***прямой призмой.***
- Прямая призма называется ***правильной,*** если её основания — правильные многоугольники.

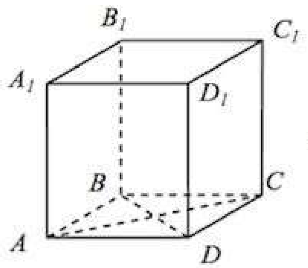


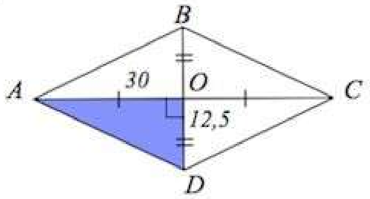
Определение: ***Пирамида*** – многогранник, основание которого – многоугольник, а остальные грани – треугольники, имеющие общую вершину.
Пирамида называется ***правильной***, если её основанием является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания.
Стороны основания есть ребра основания. Прямые, соединяющие вершины основания с вершиной, есть боковые ребра.
Определение: Высота, проведенная в боковой грани из вершины пирамиды на сторону основания, называется ***апофемой.***

Тетраэдр- многогранник, гранями которого являются четыре треугольника. У тетраэдра 4 грани, 4 вершины и 6 рёбер. Тетраэдр, у которого все грани — равносторонние треугольники, называется ***правильным***.
Пример: Найдите площадь поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями, равными 25 и 60, и боковым ребром, равным 25.



Решение: Площадь поверхности призмы $S=2S_{осн}+S_{бок}$
Площадь ромба $S=1/2d_1d_2$
Боковая поверхность данной прямой призмы – четыре равных прямоугольника.





Нам потребуется длина стороны ромба. Найдем ее по т. Пифагора из треугольника (по свойству ромба диагонали перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам):
Ответ: 4750.

Пространственные фигуры. Многогранники

I вариант	II вариант
1. *Закончите утверждение*	
1. Ребрами многогранника называются … 2. Диагоналями многогранника называются … 3. Параллелепипед – многогранник, у которого … 4. Пирамида – многогранник, у которого … 5. Правильная призма – призма, у которой …	1. Гранями многогранника называются … 2. Вершинами многогранника называются … 3. Куб – многогранник, у которого … 4. Прямая призма – призма, у которой … 5. Правильная пирамида – пирамида, у которой …
2. *Решить задачу*:	
1) Диагональ куба равна $2\sqrt{3}$. Определить полную поверхность куба. 2) Дана четырехугольная пирамида, основание которой – прямоугольник со сторонами 15 и 20 м. Боковые ребра равны 25 м. Найти высоту пирамиды. 3) Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: а) 3 дм, 4 дм, 2 дм; б) 5 м, 7 м, 8 м; в) 30 см, 20 см, 120 см.	1) Дана правильная треугольная пирамида. Ее боковая поверхность равна 144 см^2, апофема – 6 см. Найти сторону основания. 2) В правильной четырехугольной призме площадь основания равна S=144 см^2, а высота h=14 см. Найти диагональ призмы. 3) Найти диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: а) 2 дм, 6 дм, 4 дм; б) 3 м, 9 м, 10 м; в) 40 см, 70 см, 110 см.

Нахождение площади параллелепипеда и прямой призмы

Основание прямой призмы	**Высота**	**$S_{бок.}$**	**$S_{полн.}$**
Треугольник ABC, AC=15см, BC=20см, $\angle C=90°$	**12см**		
Параллелограмм ABCK,AB=3,AK=4, $\angle A=30°$	**8см**		
Прямоугольник, стороны которого 14см и 5дм.	**9см**		
Трапеция ABCK,AB=7см,AK=3см, $\angle A=90°$ **,** $\angle B=60°$	**8см**		

Дополнительное задание:

1 Вариант

Стороны основания прямого параллелепипеда 6см и 4см, угол между ними $45°$. Диагональ большей боковой грани 10см. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности параллелепипеда.

2 Вариант

В основании прямого параллелепипеда лежит ромб со стороной 12см и углом $60°$. Меньшая диагональ параллелепипеда 13см. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности параллелепипеда.

Нахождение площади полной и боковой поверхности пирамиды

1 Вариант

1.Боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол $45°$. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности пирамиды, если сторона основания равна p.

2.Высота правильной треугольной пирамиды равна $a\sqrt{3}$, радиус окружности, описанной около её основания,2а.

Найдите:

а) апофему пирамиды.

б) угол между боковой гранью и основанием.

в) площадь боковой поверхности пирамиды.

г) плоский угол при вершине пирамиды.

2 Вариант

1.Боковое ребро правильной треугольной пирамиды составляет с высотой угол $45°$. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности пирамиды, если сторона основания равна p.

2.Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна $2a$, высота пирамиды равна $a\sqrt{2}$.

Найдите:

а) Сторону основания пирамиды.

б) Угол между боковой гранью и основанием.

в) Площадь поверхности пирамиды.

г) Расстояние от центра основания пирамиды до плоскости боковой грани.

Нахождение площадей многогранников

1 Вариант

1.Найдите площадь полной поверхности куба, если расстояние от вершины верхнего основания куба до центра нижнего основания равно p.

2. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 8см и 15см и углом между ними $60°$. Высота призмы 11см. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности призмы.

3.Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол при стороне основания равен $30°$, а радиус окружности, описанной около основания, равен 2см.

2 Вариант

1. Найдите площадь полной поверхности правильного тетраэдра, высота которого равна p.

2. Основание прямой призмы – треугольник со сторонами 8см и 3см и углом между ними $60°$. Высота призмы 15см. Найдите площадь боковой и площадь полной поверхности призмы.

3. Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, если её апофема 4см, а угол между апофемой и высотой пирамиды равен

Тела и поверхности вращения

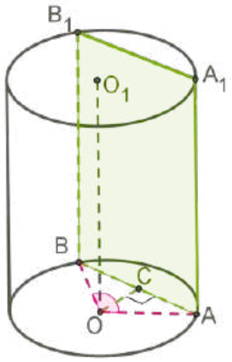
Цилиндр

Определение: ***Цилиндр*** — тело вращения, которое получается в результате вращения прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Прямоугольник AOO_1A_1 вращается вокруг стороны OO_1. OO_1 — ось симметрии цилиндра и высота цилиндра. AA_1 — образующая цилиндра, длина которой равна длине высоты цилиндра. AO — радиус цилиндра. Полученная цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра, а круги — основаниями цилиндра.

Осевое сечение цилиндра — это сечение цилиндра плоскостью, которая проходит через ось цилиндра. Это сечение является прямоугольником.

При сечении цилиндра плоскостью, параллельной оси цилиндра (т.е. перпендикулярной основанию), также получается прямоугольник. ABB_1A_1 — прямоугольник.



OA=AB=R — радиусы. OC — расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения.
Дуга AB равна центральному углу AOB.

При сечении цилиндра плоскостью, параллельной основанию, в сечении получаем круг, равный основаниям цилиндра.

Так как развёртка — прямоугольник, то боковая поверхность определяется по формуле:

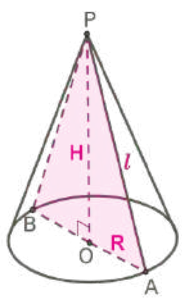
$\mathbf{S_{бок}=2\pi R\cdot H}$

Полная поверхность цилиндра определяется по формуле:

$\mathbf{S_{полн}=2\pi RH+2\pi R2=2\pi R\cdot(H+R)}$

Конус

Определение: ***Конус*** — тело вращения, которое получается в результате вращения прямоугольного треугольника вокруг его катета.



Треугольник POA вращается вокруг стороны PO.

PO — ось конуса и высота конуса. P — вершина конуса. PA — образующая конуса. Круг с центром O — основание конуса. AO — радиус основания конуса. *Осевое сечение конуса* — это сечение конуса плоскостью, которая проходит через ось PO конуса. Осевое сечение конуса — это равнобедренный треугольник. Треугольник APB — осевое сечение конуса.

∡PAO=∡PBO — углы между образующими и основанием конуса.

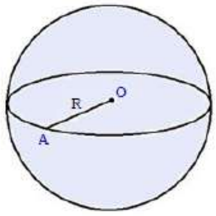
Развёрткой боковой поверхности конуса является круговой сектор. Длина дуги сектора — это длина окружности основания конуса длиной $2\pi R$, угол развёртки боковой поверхности α.

Шар, сфера

Определение: ***Шаром*** называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки.

Поверхность шара называется ***сферой.***

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара, называется **большим кругом**. Для упрощения обычно рисуется не шар, а большой круг шара.



Площадь поверхности шара (т.е. сферы) вычисляется по формуле $S(\text{сферы}) = 4\cdot\pi\cdot R^2$, где R — радиус шара.

Объём шара вычисляется по формуле $V = 4/3\cdot\pi\cdot R^3$, где R — радиус шара.

Цилиндр. Конус. Определение, элементы фигур

1 Вариант

1.Цилиндром называется …
2. Основаниями цилиндра являются …
3. Образующими цилиндра называются …
4. Осью цилиндра называется …
5. Цилиндр имеет … осевых сечений.
6.Конус получается следующим образом …
7.Высотой конуса называется …
8. Боковой поверхностью конуса называется …
9. Усеченным конусом называется …
10.Высотой усеченного конуса называется …

Вариант 2

1. Цилиндр получается следующим образом …
2. Высотой цилиндра называется …
3. Боковой поверхностью цилиндра называется …
4. Осевым сечением цилиндра называется …
5. Цилиндр имеет … образующих.
6. Конусом называется …
7. Вершиной конуса называется …
8. Образующими конуса называются …
9. Наклонным конусом называется …
10.Высотой наклонного конуса называется …

Цилиндр. Конус. Решение задач

1 Вариант

1. В цилиндре, радиус основания которого равен 4 см и высота 6 см, проведено сечение, параллельное оси. Расстояние между диагональю сечения и осью цилиндра равно 2 см. Найдите площадь сечения.
2. Через вершину конуса проведено сечение под углом 60^0 к его основанию. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения, если высота конуса равна 12 см.

3. Точка M принадлежит высоте конуса. Точка N принадлежит плоскости основания конуса, но находится вне этого основания. Постройте точку пересечения прямой MN с поверхностью конуса.
4. Диагонали осевого сечения усеченного конуса перпендикулярны, высота равна 2 см. Найдите площадь сечения усеченного конуса, проведенного через середину высоты параллельно основаниям.

2 Вариант

1. Высота цилиндра равна 15 см, радиус основания 10 см. Дан отрезок, концы которого принадлежат окружностям обоих оснований и длина которого равна $3\sqrt{41}$ см. Найдите расстояние между данным отрезком и осью цилиндра.
2. Через вершину конуса проведено сечение под углом 30^0 к его высоте. Найдите площадь сечения, если высота конуса равна $3\sqrt{3}$ см, а радиус основания 5 см.
3. В конусе задано осевое сечение. Точки K и L принадлежат двум образующим конуса, не лежащим в данном сечении. Постройте точку пересечения прямой KL с плоскостью данного осевого сечения.
4. Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 1:3, образующая составляет с плоскостью основания угол 45^0, высота равна h. Найдите площади оснований.

Нахождение площади поверхности цилиндра

1.Сделайте вычисления и заполните таблицу.

В цилиндре r – радиус основания, h – высота. Найти x и y и заполнить таблицу.

задание	**r**	**h**	$S_{бок.}$	$S_{цил.}$
1	1см	2см		
2	2см	1см		
3	25м	10,5м		
4	$\sqrt{3}$ см	7см		
5			28см^2	40см^2
6	x	a	y	2y
7	$\frac{x}{2}$	x	28см^2	
8	$\frac{x}{2}$	x		12π м^2

Дополнительные задания:

1 Вариант

1. Через образующую цилиндра проведено два сечения, из которых одно осевое, с площадью 10. Угол между сечениями равен 30^0. Найти площадь второго сечения.
2. В правильную треугольную призму вписан цилиндр. Найдите площадь его поверхности, если сторона основания призмы равна $2\sqrt{3}$, а высота равна 3.
3. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 10, боковые грани наклонены к основанию под углом 60^0. В эту пирамиду вписан цилиндр, одно основание которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если радиус основания равен 2.

2 Вариант

1.Через образующую цилиндра проведено два сечения, из которых одно осевое, с площадью 16. Угол между сечениями равен 60^0. Найти площадь второго сечения.
2.Вокруг правильной треугольной призмы описан цилиндр. Найдите площадь поверхности цилиндра, если высота призмы равна 4, а высота основания призмы равна 6.

3.В правильную треугольную пирамиду вписан цилиндр, нижнее основание которого лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность верхнего основания касается боковой поверхности пирамиды. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, если сторона основания пирамиды равна $8\sqrt{3}$, а высота цилиндра 2. Боковые грани пирамиды составляют с плоскостью основания углы 45^0.

Нахождение площади поверхности конуса

1.Сделайте вычисления и заполните таблицу.

В цилиндре r – радиус основания, h – высота, l - образующая. Найти x и заполнить таблицу.

задание	**r**	**h**	**l**	$S_{бок.}$	$S_{кон.}$
1	1см		2см		
2	12см	5см			
3		3м	5м		
4	x	x		$36\sqrt{2}\pi$ см^2	
5	$\frac{x}{2}$	a	x		
6			27см		810π см^2

Дополнительные задания:

1 Вариант

1. Развёртка боковой поверхности цилиндра является квадратом, диагональ которого равна 10см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2. Плоскость, параллельная оси цилиндра, отсекает от окружности основания дугу в $120°$. Высота цилиндра равна 5см, радиус цилиндра - $2\sqrt{3}$ см. Найдите площадь сечения.

2 Вариант

1. Развёртка боковой поверхности цилиндра является прямоугольником, диагональ которого равна 8см, а угол между диагоналями - $30°$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
2. Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, есть квадрат. Эта плоскость отсекает от окружности основания дугу в $90°$. Радиус цилиндра равен 4см. Найдите площадь сечения.

Сфера и шар. Взаимное расположение сферы и плоскости

1 Вариант

1. Ответьте на вопросы:

1. Сферой с центром в точке *O* и радиусом *R* называется …
2. Большим кругом называется …
3. Сфера и плоскость не пересекаются, если …
4. Плоскость называется касательной к сфере, если …
5. Ортогональной проекцией шара является …

2. Решите задачи

1. Шар, радиус которого равен 10 см, пересечен плоскостью, находящейся на расстоянии 9 см от центра. Найдите площадь сечения.
2. Сечения шара радиуса *R* двумя параллельными плоскостями имеют радиусы r_1 и r_2. Найдите расстояние между этими плоскостями, если они расположены по разные стороны от центра.

3. Стороны треугольника касаются сферы. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если радиус сферы равен 5 см, а стороны треугольника равны 12 см, 10 см, 10 см.
4. Каждая сторона ромба касается сферы радиуса 10 см. Плоскость ромба удалена от центра сферы на 8 см. Найдите площадь ромба, если его сторона равна 12,5 см.

2 Вариант

1. Ответьте на вопросы:

1. Шаром с центром в точке *O* и радиусом *R* называется …
2. Большой окружностью называется …
3. Сфера и плоскость пересекаются, если …
4. Плоскость и сфера касаются, если …
5. Сечением шара плоскостью является …

2. Решите задачи

1. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярно к нему плоскость. Как относится площадь большого круга данного шара к площади получившегося сечения?

2. Сечения шара радиуса R двумя параллельными плоскостями имеют радиусы r_1 и r_2. Найдите расстояние между этими плоскостями, если они расположены по одну сторону от центра.

3. Стороны ромба касаются сферы радиуса 13 см. Найдите расстояние от плоскости ромба до центра сферы, если диагонали ромба равны 30 см и 40 см.

4. Через конец радиуса шара проведена плоскость, составляющая с ним 30^0. Найдите площадь сечения шара этой плоскостью, если радиус шара равен 6 см.

Уравнение сферы

Решите задачи:

1.Укажите центр и радиус сферы, заданной уравнением
а) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 + (z + 9)^2 = 25$; б) $(x - 3{,}6)^2 + (y + 0{,}75)^2 + (z + 777)^2 = 1{,}21$
2.Проверьте, лежит ли точка А на сфере
а)$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$,если A(-1;-1;3) б)$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z + 4)^2 = 16$, если A(4;-3;-2)
3.Напишите уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат, если R = 8; R = 2,5
4.Напишите уравнение шара радиуса R с центром в начале координат, если R = 6
5.Напишите уравнение сферы радиуса R с центром в точке C, если C(-3;2;4) и R = 5
6.Напишите уравнение шара радиуса R с центром в точке C, если C(5;4;-2) и R = 0,5
7.Составьте уравнение сферы с центром в точке C, проходящей через точку M, если
а) C(0;-4;9), M(6;-1;0); б) C(-2;4;0), M(-2;4;3)
8.Докажите, что каждое из следующих уравнений задаёт сферу. Найдите координаты центра и радиус этих сфер
а) $x^2 - 9x + y^2 + 2y + z^2 = 34$; б) $x^2 + y^2 - 3z + z^2 + 5y - x - 18 = 0$
9.Найти координаты точек пересечения сферы с координатными осями
$(x + 3)^2 + y^2 + (z - 5)^2 = 25$